CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA a XVI-a

BĂILEȘTI, 23 MARTIE 2019

CLASA a V-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Numărul A este anul în care s-a desfășurat prima ediție a Concursului „SFERA”, iar numărul A-1 este anul în care a apărut primul număr al revistei “SFERA”.
   Dacă $A = 2203 - \{4704 : 24 + 3 + 178 \cdot 5 - [6950 : 25 + 2 + (486 : 2 + 122 \cdot 3)]\}$, atunci numărul divizorilor lui A-1 este:
   a) 4; b) 8; c) 16; d)alt răspuns.

2. Numărul $B = 2^{n+2} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+2} + 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n+4} + 2^n \cdot 3^{n+5} \cdot 5^n + 2^{n+8} \cdot 3^n \cdot 5^n - 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n$, unde n este număr natural, se divide cu:
   a) 2017; b) 2016; c) 2019; d) 2018.

3. Care este numărul minim de numere naturale diferite pe care trebuie să le alegem pentru a fi siguri că există cel puțin patru dintre ele care să dea același rest la împărțirea cu 9 ?
   a) 28; b) 27; c) 29; d) 26.

4. Numărul $A = 13^1 + 13^2 + 13^3 + \cdots + 13^{2020}$ se divide cu
   a) 113; b) 117; c) 121; d) 119.

5. Un motociclist parcurge o distanță în trei zile. În prima zi parcurge cu 6 km mai putin decât o treime din distanță. A doua zi parcurge cu 5 km mai mult decât o șesime din distanța rămasă, iar a treia zi parcurge restul de 200 km. Ce distanță a parcurs motociclistul în cele trei zile ?
   a) 264 km; b) 320 km; c) 360 km; d) 280 km.

Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Determinați patru numere naturale *a, b, c, d* pentru care :

$$2^{3n+2} \cdot 5^{3n+2} \cdot 3 - 2^{3n+3} \cdot 5^{3n+2} = a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

prof. Nicolae Ivășchescu, Canada, G.M. nr. 6-7-8/2018

Problema 2 (20 puncte)

Pentru $n \in \mathbf{N^*}$, notăm $n? = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n$. Să se afle ultimele cinci cifre ale numărului $\mathbf{S_n = 1? + 2? + 3? + \ldots + n?}$, pentru orice $\mathbf{n \geq 4}$.

prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia - Sfera matematicii nr. 23

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

Din oficiu: 10 puncte

<u>**BAREM -Clasa a V-a**</u>

Partea I (5 x 10 p.)

1. c); 2. d); 3. a); 4. d); 5.c)

Partea a II-a

Problema 1

Avem $A = 2^{3n+2} \cdot 5^{3n+2} \cdot 3 - 2^{3n+3} \cdot 5^{3n+2} = 2^{3n} \cdot 5^{3n} \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 - 2^3 \cdot 5^2) = 10^{3n} \cdot 100$..........**5p**

Dar $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$..........**5p**

Obținem $A = (10^n \cdot 1)^3 + (10^n \cdot 2)^3 + (10^n \cdot 3)^3 + (10^n \cdot 4)^3$..........**5p**

Deci, o soluție este $a = 10^n$, $b = 10^n \cdot 2$, $c = 10^n \cdot 3$, $d = 10^n \cdot 4$..........**5p**

Problema 2

Avem : **S_1 = 1? = 1 , S_2 = 1? + 2? = 1 + 4 = 5 , S_3 = 1? + 2? + 3? = 1 + 4 + 108 = 113 , ……3p**

S_4 = 1? + 2? + 3? + 4? = S_3 + 4? = S_3 + $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4$ **= 113 + 27648 = 27761 ………………2p**

Cum **5? =** $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 = 3^3 \cdot 4^5 \cdot 5^5 = 3^3 \cdot 20^5$ = 86.400.000 ………………**2p**

Cu atat mai mult , pentru orice $5 \le k \le n$ avem **k ? =** $\boldsymbol{M_{10^5}}$……………………………….**5p**

Rezultă **S_n = S_4 +** $\boldsymbol{M_{10^5}}$= 27761 + $\boldsymbol{M_{10^5}}$. ……………………………………………..**5p**

Deci, ultimile cinci cifre ale numărului S_n sunt **27.761** . …………………………………..**3p**

NOTĂ: Orice altă modalitate corectă de rezolvare se acceptă şi se punctează corespunzător.