CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA a XVI-a

BĂILEȘTI, 23 MARTIE 2019

CLASA a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Numărul soluțiilor întregi ale ecuatiei $x^3-y^2 = y^3+x^2-2019$.

a) 2 b) 1 c) 0 d) 4.

2.Fie ABCD un trapez isoscel cu AB // CD , AD=BC, AC$\perp BD$.Dacă aria trapezului este 1024 cm^2 , înălțimea trapezului este :

a) 64 cm . b) 52 cm c) 32 cm d) 40 cm

3. În paralelogramul ABCD de centru O, cu unghiul D obtuz, bisectoarea unghiului ADC intersectează diagonala AC în punctul T astfel încât AC=3•AT și AB în punctul E.
Raportul ariilor triunghiului TAD și patrulaterului TOBE este :

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{7}{8}$ d) 1

4. Dacă *x*,*y* și *z* sunt numere reale,valoarea minimă a expresiei

$E(x,y,z) = \sqrt{x^2-2x+10} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2-4z+29}$

a) 40 b) 15 c) $2\sqrt{10}$ d) 9

5. Știind că *a*,*b si c* sunt numere reale strict pozitive și $a + 2b^2 + 3c^3 + \frac{1}{a} + 2b^{-2} + 3 \cdot c^{-3} = 12$.
Suma $a+b+c$ va avea valoarea :

a) 12 ; b) 3 ; c) 6 ; d) 9.

Probleme propuse de prof. Doina Firicel , Calafat

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Se consideră suma $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018\cdot2019}$. Să se demonstreze că $S<\frac{1}{4}$.

Prof. Marian Firicel, Calafat

Problema 2 (20 puncte)

Pe latura (BC) a triunghiului ABC considerăm punctele R și S astfel încât $R \in (BS)$ şi $S \in (RC)$. Bisectoarea interioară a unghiului B intersectează pe (AS) în Q şi bisectoarea interioară a unghiului C intersectează pe (AR) în P. Arătaţi că PQ ∥ RS dacă și numai dacă $AB - AC = \frac{AB}{BC} \cdot BR - \frac{AC}{BC} \cdot CS$.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroșani, Revista “Sfera Matematicii”

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

Din oficiu: 10 puncte

BAREM –Clasa a VII-a

PARTEA I

1. c) 2. c) 3 d) 4) d 5) b)

PARTEA a II-a

PROBLEMA 1

Demonstrăm că pentru p natural nenul este adevarata egalitatea :

$\frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right)$……………………………………………………………**(6p)**

Dând valori lui p: 1,2,3,…, 2017,obtinem

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$, …, $\frac{1}{2017\cdot 2018\cdot 2019} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2017} - \frac{2}{2018} + \frac{1}{2019}\right)$……… **(5p)**

Însumând, rezulta $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}\right)$ ……………………………………**(6p)**

Finalizare ……………………………………………………………… **(3p)**

PROBLEMA 2

În ΔABR aplicăm teorema lui Menelaos pentru transversala CPC' şi avem:

$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{CB}{CR}\cdot\frac{RP}{PA}=1$ (1)... **(4p)**

Aplicând teorema bisectoarei CC', avem: $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC}{BC}$ (2) şi înlocuind în (1), rezultă:

$\frac{AP}{PR}=\frac{AC}{CR}$ (3)..**(4p)**

În $\Delta\ ACS$ aplicăm teorema lui Menelaos pentru transversala BQB' şi avem :

$\frac{AQ}{QS}\cdot\frac{BS}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$ (4). ....**(4p)**

Aplicând teorema bisectoarei BB', avem: $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AB}$ (5) şi înlocuind în (4),

rezultă că $\frac{AQ}{QS}=\frac{AB}{BS}$ (6). ....**(4p)**

Din (3) şi (6) rezultă că $PQ \parallel RS \Leftrightarrow \frac{AC}{CR}=\frac{AB}{BS} \Leftrightarrow AC(BC-CS)=AB(BC-BR) \Leftrightarrow$

$AB-AC = \frac{AB}{BC}\cdot BR-\frac{AC}{BC}\cdot CS$ …………………………………………………………**(4p)**