MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – IX – a, M1

AN SCOLAR 2008-2009

1. Fie ecuatia $2(m+2)^2 x^2 - 2(m^2+3m+2)\cdot x - m = 0$; $m \in (0,\infty)$

a) demonstrati ca radacinile ecuatiei sunt reale si distincte

b) daca $x_1 < x_2$, aratati ca $-\frac{1}{2} < x_1 < 0 < x_2 < 1$, unde x_1 si x_2 sunt radacinile ec.date.

2. Să se determine progresia aritmetică din 6 termeni astfel ca suma pătratelor primilor 4 termeni să fie egală cu produsul primilor 3 termeni cât şi cu produsul ultimilor doi termeni.

3. În patrulaterul convex ABCD se iau punctele M∈(BC), N∈(CD) astfel încât: $\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{BM}} = 3$; $\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} = 2$

Dreptele AM şi BN se intersectează în punctul P. Se cere:

a) să se exprime vectorii $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$;

b) dacă patrulaterul ABCD este paralelogram, să se calculeze $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PM}}$ si $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PN}}$.

4. Dacă $n \in N^*$ atunci $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – X – a, M1

AN SCOLAR 2008-2009

1. Se consideră funcțiile $f,g:R\to(0;+\infty)$, $f(x)=\begin{cases}2^x, x\in Q\\ 3^x, x\in R\setminus Q\end{cases}$ si

$g(x)=\begin{cases}2^x, x\in Q\\ 4^x, x\in R\setminus Q\end{cases}$

a) Să se arate că *f* nu este nici injectivă şi nici surjectivă.

b) Să se arate că *g* este bijectivă.

2. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea $\frac{m_a}{l_a}\le\frac{b^2+c^2}{2bc}$.

3. Să se rezolve ecuația $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{x}-3\right)}-3^{\lg\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}=7$.

1. Să se arate că , dacă $|z^2+1|=2\cdot|z+1|$ cu $z\in C$ atunci $|z|\le\sqrt{7}$.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – XI – a, M1

AN SCOLAR 2008-2009

1. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât:

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{ax^2+bx+c}-2x-3)=2009$$

2. Fie a $\in$ C şi matricea A $\in$ M_2(C), A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Dacă se notează cu B $=A+A^2+A^3+\ldots+A^n$, $n\in N^=$, să se determine matricea B.

3. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de relația $a_n=\frac{6a_{n+1}+a_{n-1}}{5}$ cu $a_1=\frac{1}{2}$ şi $a_2=\frac{1}{3}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

4. a) Fie A $\in$ M_2(C) cu proprietatea că TrA = TrA^2 = 0. Arătați că det(A^2) =0.

b) Fie A $\in$ M_2(R) cu proprietatea că TrA $\neq$ 0. Să se arate că matricea B $\in$ M_2(R) comută cu matricea A dacă şi numai dacă comută cu A^2.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – XII – a, M1

AN SCOLAR 2008-2009

$\boxed{1.}$ Fie $G=(-1,1)$. Pentru orice $x,y\in G$ notăm $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

a) Arătați că $(G,\circ)$ este grup abelian .
b) Arătați că grupurile $(G,\circ)$ şi $(R_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe .
c) Pentru orice $n\in N$, $n\geq 2$ calculați $\dfrac{1}{7}\circ\dfrac{1}{17}\circ\dfrac{1}{31}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2n^2-1}$.

$\boxed{2.}$ Pe mulțimea M = (0, ∞) se consideră legea de compoziție φ: MxM→M notată cu φ(x,y)=x∗y, care îndeplineşte condițiile:

1) (x+1)∗x=1, ∀x∈M;
2) (xy)∗z = x(y∗z) ∀x, y, z ∈M, unde „xy” reprezintă produsul numerelor reale x şi y.

Se cere:

a) Să se calculeze $\sqrt{2}*(\sqrt{2}+1)$;
b) Să se studieze dacă φ este asociativă;
c) Să se studieze dacă dacă φ admite element neutru.

$\boxed{3.}$ Fie $a\in R$, $a^2>2$ şi $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{(a+\sin x+\cos x)^{2007}}$, unde D este domeniul maxim de definiție . Se cere :

a) Determinați D ;
b) Găsiți primitivele funcției f pe D .

$\boxed{4.}$ Fie funcțiile $f, F : R \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arc}tg\sqrt{x^4+2x^2}$.

a) Să se studieze dacă F este primitivă pentru f .
b) Să se calculeze $\int f(x)dx$, $x \in R$.

<u>NOTA:</u> Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – IX – a, M2 REAL

AN SCOLAR 2008-2009

1. Să se arate că numărul $N=\left[\sqrt{n^2+1}\right]+\left[\sqrt{n^2+2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2+n}\right]$

este pătrat perfect.

2. Sa se determine multimea de adevar a predicatelor:

$p_1(x): |x+5y-17|+|3x-4y+6|=0, x, y\in\mathbb{R}$Z,

$p_2(x): \left[\frac{x-1}{3}\right]=\frac{x+1}{4}, x\in\mathbb{R}$R

3.Fie E si F mijloacele laturilor [AB] si[CD] ale patrulaterului ABCD si I mijlocul lui [EF]. Aratati ca :

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$=0;

b) Daca $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ si $EJ\cap CI=\{M\}$ aratati ca $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}$

4. O tribuna a unui stadion se compune din 41 de rânduri de scaune şi pe fiecare rând următor se află cu 10 locuri mai multe decât pe rândul precedent. În ultimul rând sunt 500 de locuri. Câti spectatori pot intra în aceast stadion ?

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – IX – a, M2 TEHNOLOGIC

AN SCOLAR 2008-2009

1. Să se calculeze N $= [\sqrt{1\cdot 2}] + [\sqrt{2\cdot 3}] + \cdots + [\sqrt{n\cdot(n+1)}]$

2. Se da predicatul matematic: p(n):” $\frac{2n+7}{n+1} \in Z$, pentru n numar intreg”.

   a) Sa se precizeze valoarea de adevar a propozitiilor: p(0), p(2), p(4) si
   q: “$\exists$ x$\in$Z astfel incat p(x)$\in$Z-N “

   b) Sa se determine multimea de adevar a predicatului p(x).

3. a) Rezolvati in R inecuatia $\frac{(-x+2)(3x+1)}{x-3} \le 0$

   b) Rezolvati in RxR sistemul: $\begin{cases} 2|x-1|+3|y|=5 \\ 3|x-1|+5|y|=8 \end{cases}$

4. O tribuna a unui stadion se compune din 41 de rânduri de scaune şi pe fiecare rând următor se află cu 10 locuri mai multe decât pe rândul precedent. În ultimul rând sunt 500 de locuri. Câţi spectatori pot intra în aceast stadion ?

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro
EGALITATE DE ŞANSE ÎNTR-O ŞCOALĂ EUROPEANĂ!
Inspectoratul Şcolar Judetean Ilfov

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – X – a, M2

AN SCOLAR 2008-2009

1. Se considera suma:

$$S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

unde n este numar natural nenul.

a) Calculati S_{2009};

b) Determinati cel mai mic numar n pentru care $S_n \geq 100$.

2. a) Aratati ca $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lg\frac{1}{n}$, unde n este un numar natural nenul;

b) Calculati: $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+\ldots+\lg\frac{99}{100}$.

3. a) Calculati: $N = i^{17} + i^{42} + i^{63} + i^{80}; (1+i)^{12}$;

b) Aflați $x, y \in R$ dacă $xz_1 + yz_2 = 5$, unde $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-2i$.

4. Calculati :

a) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

b) Stiind ca ln5 =a , logaritmati $E = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5}}}$

<u>NOTA:</u> Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – XI – a, M2

AN SCOLAR 2008-2009

1) Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Să se rezolve ecuația $\det(A - \alpha I_3) = 0$
b) Să se calculeze $A + A^2 + ... + A^n$

2. Sa se calculeze limitele sirurilor :

$$a_n = \left(1 + \frac{n}{2n^2+1}\right)^{3n}$$
$$b_n = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n[1+3+5+\cdots+(2n-1)]}$$

3.Sa se studieze convergenta sirurilor:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\ .$$
$$b_n = \frac{1}{1\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)^2}$$

4. Să se demostreze următoarea egalitate:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \\ 1 & f(c) & g(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & f(a)-m & 1 \\ b^2 & f(b)-m & 1 \\ c^2 & f(c)-m & 1 \end{vmatrix}$$, pentru orice a, b, c, m $\in$ R, unde $f,g:R \to R$, $f(x) = x + m$ şi $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV
Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, Bucureşti
Tel: 021-317.36.50/021-317.36.51, Fax: 021-317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro web: www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA: 14.02.2009

CLASA a – XII – a, M2

AN SCOLAR 2008-2009

1. Pe multimea *C* se defineste legea de compozitie $x * y = xy + ax + ay + b$. Determinati *a+b* daca elemental neutru este 4

2. Pe *R* notam $x * y = xy - \frac{x+y}{3} + \frac{4}{9}$ si $x_*^n = \underbrace{x * x * ... * x}_{de\ n\ ori}$

a) Determinati nr real *a* daca $(R \setminus \{a\}; *)$ este grup abelian

b) Rezolvati ecuatia $x_*^6 + 2x_*^3 = 0$

3. Determinati $F(1)$ daca $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$ si $F(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \arccos \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

4. Sa se calculeze primitivele urmatoarelor functii :

a) $f : R^* \to R, f_{(x)} = \frac{1}{x^4 + x^2}$.

b) $f : (0;\infty) \to R$, $f_{(x)} = \frac{x^{3n-1} - x^{n-1}}{x^{4n} + 1}$, $n \in Z$.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte