CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” - EDIȚIA a XVI-a

BĂILEȘTI, 23 MARTIE 2019

CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Se dau numerele reale $x = 8 - 3\sqrt{7}$ și $= 8 + 3\sqrt{7}$. Expresia:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{6\sqrt{7}}{x^2-y^2}-\frac{16}{xy}+\frac{1}{x+y}$ este egală cu:

a) 16 b) -16 c) 1 d) 0

2. Dacă $a + b + c + d = 10$. Valoarea expresiei

$E = \overline{a,bc(d)} + \overline{b,cd(a)} + \overline{c,da(b)} + \overline{d,ab(c)}$, este:

a) $\frac{11111}{900}$ b) $\frac{111}{990}$ c) $\frac{1111}{900}$ d) $\frac{100}{9}$

3. Suma primilor 20 de termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n = 2^n - n$, este:

a) $3\cdot 2^{21} - 212$ b) $2^{22} - 221$ c) $2^{21} - 212$ d) $2^{20} - 212$

4. Fie a și b numere strict pozitive care verifică relația: $a^2 + b^2 = 1$. Determinați intersecția și reuniunea intervalelor: $I = \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right]$ și $J = \left[\sqrt{ab}, \sqrt{1/2}\right]$, pentru următoarele cazuri:

I. $\boldsymbol{a \neq b}$

a) $I \cap J = \left[2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right]$, $I \cup J = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

b) $I \cap J = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $I \cup J = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

c) $I \cap J = \left[\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right]$, $I \cup J = \left(-\infty; \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

d) $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

II. $\boldsymbol{a = b}$

a) $I \cap J = [1, \sqrt{2}]$, $I \cup J = (-\infty, \sqrt{2}]$.

b) $I \cap J = [\sqrt{2}, 2]$, $I \cup J = (-\infty, \sqrt{2}]$.

c) $I \cap J = \{\sqrt{2}\}$, $I \cup J = (-\infty, \sqrt{2}]$.

d) $I \cap J = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $I \cup J = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

5. **(10p)** Dreptele a și b concurente în O situat în afara unui plan α, fac cu planul α unghiuri de 30° respectiv 45° , iar planul dreptelor (a, b) face cu planul α un unghi de 60°. Unghiul dreptelor a, b, este:

a) 90^0 b) 60^0 c) 45^0 d) 30^0

Probleme propuse de prof Moanță Cristian, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Rezolvați în numere reale pozitive ecuația: $2x^2y + xy^2 - 8xy + 4x + 2y = 0$.

Problema 2 (20 puncte (12+8))

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Considerăm punctele E $\in (BD)$ astfel încât BD=4$\cdot DE$ și $E' \in (B'D')$ astfel încât $D'E'$=3$\cdot$ $B'E'$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor AB, BC, $C'D'$ și respectiv $A'D'$, arătați că:

a) Planele (EPQ) și $(E'MN)$ sunt paralele;

b) Dacă $BD' \cap (E'MN) = \{T\}$ și $BD' \cap$ (EPQ)= $\{T'\}$, atunci $TT' = 2BT$.

Probleme propuse de prof Moanță Cristian, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE CORECTARE- Clasa a VIII-a

Partea I

1. **d)** 2. **d)** 3. **c)** 4. I.**c)**, II.**d)** 5. **a)**

Partea a II a

Problema 1

Ecuația se poate scrie echivalent astfel: $(2x+y)(2+xy)=8xy$. **(5p)**
În conformitate cu inegalitatea mediilor, avem $2x+y\geq 2\sqrt{2xy}$ și $2+xy\geq 2\sqrt{2xy}$, cu egalitate pentru $2x=y$ și respectiv pentru $2=xy$. **(5p)**
Așadar $(2x+y)(2+xy)\geq 8xy$, cu egalitate dacă $2x=y$ și $2=xy$. Prin urmare soluțiile ecuației considerate sunt date de soluțiile pozitive ale sistemului $\begin{cases}2x=y\\2=xy\end{cases}$, adică sunt $x=1$ și $y=2$. **(10p)**

Problema 2

a) Din (MN) linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ (1)
Din (PQ) linie mijlocie în triunghiul $A'C'D' \Rightarrow$ PQ $\parallel A'C'$ (2)
Din $AA'C'C$ paralelogram $\Rightarrow AC \parallel A'C'$ (3)
Din relațiile (1), (2), (3) $\Rightarrow MN \parallel PQ$ (4). **(4p)**
Dacă $MN\cap BD=\{F\}$ și MN linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow BD=4BF$.
Dacă PQ $\cap B'D'=\{F'\}$ și PQ linie mijlocie în triunghiul $A'C'D' \Rightarrow B'D'=4D'F'$ și din BD $=4\cdot DE \Rightarrow DE=D'F'$ și cum $DE \parallel D'F' \Rightarrow DD'F'E$ este paralelogram$\Rightarrow DD' \parallel EF'$(5)
Dacă $MN \cap BD=\{F\}$ și analog arătăm că $BB' \parallel FE'$(6)
Din $BB' \parallel DD'$ și (5), (6) $\Rightarrow EF' \parallel FE'$ (7)) **(6p)**
Din (4) și (7) $\Rightarrow (EPQ) \parallel (E'MN)$ **(2p)**

b) Cum $(E'MN)\cap(BDD') = EF'$ și $BD'\cap(E'MN)=\{T\} \Rightarrow$ T$\in EF'$
și (EPQ)) $\cap (BDD') = FE'$ și $BD' \cap (EPQ) = \{T'\} \Rightarrow T' \in FE'$ **(4p)**
Dacă $OO'\cap BD'$=$\{R\}$, în $\triangle BTF$ avem $TF \parallel RO \parallel ET' \Rightarrow$ aplicând teorema lui Thales
$\frac{BT}{T'T}$=$\frac{BF}{BE}=\frac{1}{2} \Rightarrow TT'=2BT$. **(4p)**