CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA a XVI-a

BĂILEȘTI, 23 MARTIE 2019

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Rezultatul calculului $\left|\sqrt{14-6\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{21-4\cdot\sqrt{5}}\right| - \left|5-\sqrt{45}\right|$ este :

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

2. Daca $\left[\frac{3\cdot x+6}{2}\right] = \{x\} + 6$, atunci x se afla in intervalul :

a) [0, 1] b) [1,3] c) [2018, 2019] d) [2019, 2020]

3. Fie ABCDEF un hexagon regulat de centru O. Daca $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=k\cdot\overrightarrow{AO}$, atunci k are valoarea :

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

4. Solutia ecuatiei $1 + 8 + 15 + 22 + \ldots\ldots + x = 1491$ este :

a) 140 b) 141 c) 142 d) 143

5. Fie propozitia : “Cine se trezeste de dimineta, departe ajunge.” Negatia ei este propozitia:

a) “Cine se trezeste de dimineta, nu ajunge departe.”
b) “Cine nu se trezeste de dimineta, nu ajunge departe.”
c) “ Unii nu se trezesc de dimineata, dar ajung departe.”
d) “ Unii se trezesc de dimineata, dar nu ajung departe.”

Probleme selectate si propuse de profesor Ionut Ivănescu, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Numerele strict pozitive a, b, c au proprietatea ca $\max\{a, b, c, a\cdot b, b\cdot c, c\cdot a, a\cdot b\cdot c\} < 3$.

Demonstrati ca $a + b + c \neq a\cdot b\cdot c$.

Prof. Ionut Ivănescu, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră M, N, P şi Q mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD]$ şi $[DA]$. Arătaţi că $MP \perp QN \Leftrightarrow AC = BD$.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroșani, Revista Sfera Matematicii

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute .Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE CORECTARE SI EVALUARE

Clasa a IX – a

Oficiu ……………………………………………………………………………...10p

Partea I: **1)** c **2)** b **3)** a **4)** b **5)** d ………….........50p

Patrea a II – a

1) Presupunem prin absurd ca a + b + c = $a\cdot b\cdot c$ …………………………………………1p

Impartind aceasta egalitate prin $a\cdot b\cdot c$ obtinem ca $\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot a}=1$ (1) …………...1p

Conform inegalitatii Cauchy- Buniakowski – Scwartz avem :

$(a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a)\cdot\left(\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot a}\right)\geq\left(\sqrt{a\cdot b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}+\sqrt{b\cdot c}\cdot\frac{1}{\sqrt{b\cdot c}}+\sqrt{c\cdot a}\cdot\frac{1}{\sqrt{c\cdot a}}\right)^2$

$= 9$ (2) ……………………………………………………………………………2p

Din relatiile (1) si (2) $\Rightarrow$ $a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a \geq 9$ ……………………………………...2p

$1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2\cdot b^2 + b^2\cdot c^2 + c^2\cdot a^2 + a^2\cdot b^2\cdot c^2 =$

$= 1+(a+b+c)^2 - 2\cdot(a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a) + (a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a)^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot(a+b+c) + a^2\cdot b^2\cdot c^2$ …..2p

$= 1 + a^2\cdot b^2\cdot c^2 - 2\cdot(a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a) + (a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a)^2 - 2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2 + a^2\cdot b^2\cdot c^2 =$ ……….2p

$= (a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a)^2 - 2\cdot(a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a) + 1 =$ …………………………………………2p

$= (a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a - 1)^2 \geq (9-1)^2 = 64$ ……………………………………………...2p

Deci $a^2 + b^2 + c^2 + a^2\cdot b^2 + b^2\cdot c^2 + c^2\cdot a^2 + a^2\cdot b^2\cdot c^2 \geq 63$……………………………...2p

Asadar $7\cdot(\max\{a, b, c, a\cdot b, b\cdot c, c\cdot a, a\cdot b\cdot c\})^2 \geq 63$ ……………………………………….2p

Deducem ca $\max\{a, b, c, a\cdot b, b\cdot c, c\cdot a, a\cdot b\cdot c\} \geq 3$ – contradictie …………………………1p

Deci presupunerea facuta este falsa $\Rightarrow$ a + b + c $\neq$ $a\cdot b\cdot c$, c.c.t.d.…...……………………1p

Problema 2

Soluția sintetică. Deoarece $MQ \equiv PN$ şi $MQ \parallel PN$ (linii mijlocii în ΔADB şi ΔCDB) rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram **(10p).**Dacă $MP \perp QN$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este romb **(5p)** şi atunci $QM = MN \Leftrightarrow AC = BD$. **(5p)**

Soluţia vectorială.Fie $AC \cap BD = \{O\}$.Deoarece $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}$,avem : $MP \perp QN \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QN} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}\right) =$

$$= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OQ} = 0 \Leftrightarrow \frac{OP^2 + ON^2 - PN^2}{2} -$$

$$-\frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2} - \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2} + \frac{OM^2 + OQ^2 - MQ^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PQ^2 + MN^2 = PN^2 + MQ^2 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{AC^2}{4} = 2\cdot\frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AC = BD.$$