CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA a XVI-a
BĂILEȘTI, 23 MARTIE 2019
CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Partea întreagă a numărului $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2019} 2020$ este egală cu:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

2. Suma soluțiilor ecuației $\left(4-\sqrt{15}\right)^{3x^2+5x}+\left(4+\sqrt{15}\right)^{3x^2+5x}=62$ este :

a) 1 b) 0 c) $-\frac{10}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

3. Mulțimea soluțiilor inecuației $\log_{x+1}(x+2)>\log_{x+2}(x+1)$ atunci :

a) $\left(-1,\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(0,\infty)$ b) $(0,\infty)$ c) $\varnothing$ d) $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

4. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte și

$$z=\frac{z_1^{\,2}}{(z_1-z_2)\cdot(z_1-z_3)}+\frac{z_2^{\,2}}{(z_2-z_3)\cdot(z_2-z_1)}+\frac{z_3^{\,2}}{(z_3-z_1)\cdot(z_3-z_2)}.$$

Modulul numărului complex $z+i$ este:

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

5. Dacă $a=\cos 3-tg 3$ atunci:

a) $a<0$ b) $a>0$ c) $a=0$ d) $a=1$

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Rezolvați în $\boldsymbol{R}\times R$ sistemul : $\begin{cases}\lg(x+e)\cdot\ln(y+10)=2\\ \ln(x+e)+\lg(y+10)=3\end{cases}$

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{C}^*$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 1$ și $z_1-z_2\cdot z_3\in\boldsymbol{R}$, $z_2-z_3\cdot z_1\in\boldsymbol{R}$, $z_3-z_1\cdot z_2\in\boldsymbol{R}$.
Demonstrați că cel puțin două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt egale.

Prof. Ionuț Ivănescu, Craiova, Revista Sfera Matematicii, Nr.1/2015

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute . Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE CORETARE-Clasa a X-a

Partea I : 1) b 2) c 3) a 4) d 5) a

Partea a II-a:

1) Din condițiile de existență: $x > -e,\ \ y > -10$ …………………………………………………...(2p)

$\lg(x+e)\cdot\ln(y+10)=\dfrac{\ln(x+e)}{\ln 10}\cdot\dfrac{\lg(y+10)}{\lg e}=\ln(x+e)\cdot\lg(y+10)$ ……………………………………(5p)

Sistemul se scrie: $\begin{cases}\ln(x+e)\cdot\lg(y+10)=2\\ \ln(x+e)+\lg(y+10)=3\end{cases}$ ……………………………………………………….(3p)

Notăm $a=\ln(x+e),\quad b=\lg(y+10)$ ……………………………………………………………(2p)

Obținem sistemul $\begin{cases}a\cdot b=2\\ a+b=3\end{cases}$ ……………………………………………………………………(3p)

cu soluțiile $a=1, b=2$ respectiv $a=2, b=1$……………………………………………………………..(2p)

$(x,y)\in\left\{(0,90);\left(e^2-e,0\right)\right\}$ ……………………..……………………………………………………(3p)

2) Fie $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ ……………………………………………………………….….(2p)

$z_1-z_2z_3\in\mathbb{R}\ \Rightarrow z_1-z_2z_3=\overline{z_1}-\overline{z_2z_3}\ \ (1)$ ....(2p)

$z_2-z_3z_1\in\mathbb{R}\ \Rightarrow z_2-z_3z_1=\overline{z_2}-\overline{z_3z_1}\ \ (2)$ ....(2p)

Înmulțind relațiile (1) și(2) obținem $z_1\overline{z_2}=z_2\overline{z_1}$ deci $z_1\overline{z_2}=a\in\mathbb{R}^*$ ....(4p)

Analog $z_2\overline{z_3}=b\in\mathbb{R}^*$, $z_3\overline{z_1}=c\in\mathbb{R}^*$ ....(2p)

Rezultă $z_3=\alpha z_1, \alpha\in\mathbb{R}, |\alpha|=1$ și $z_2=\beta z_1, \beta\in\mathbb{R}, |\beta|=1$ ....(4p)

Deci, cel puțin două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt egale ....(4p)