CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:[1,19]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{19-x}$.
b) Rezolvați ecuația $2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{19-x}\right)+(x-1)(19-x)=93$.

(Concurs GM, ediția a V-a, prelucrare)

SOLUȚIE:

a)$\forall x,y\in[1,19], x<y, f(x)-f(y)=\frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}-\frac{x-y}{\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y}}=$

$=(x-y)\cdot\frac{\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y}-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})\cdot(\sqrt{19-x}+\sqrt{19-y})}$ **1p**

Dacă $x,y\in[1,10]\Rightarrow\sqrt{19-x}>\sqrt{x-1},\sqrt{19-y}\geq\sqrt{y-1}\Rightarrow f(x)-f(y)<0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[1,10]$ **1p**

Dacă $x,y\in[10,19]\Rightarrow\sqrt{19-x}\leq\sqrt{x-1},\sqrt{19-y}<\sqrt{y-1}\Rightarrow f(x)-f(y)>0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[10,19]$ **1p**

b) Din condițiile de existență ale radicalilor avem că $x\in[1,19]$.. **1p**

$2f(x)=(x-10)^2+12$ **1p**

$12\leq 2f(x)<2f(10)=12,\forall x\in[1,10)\cup(10,19]\Rightarrow$ Ecuația nu are soluții $x\in[1,10)\cup(10,19]$ ... **1p**

Cum $x=10$ este soluție, concluzionăm că ecuația are o singură soluție: $x=10$. **1p**

Problema 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ecuația:$2\cdot\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]^2+(2x-11)\cdot\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]+5-x=0$.

SOLUȚIE:

Notând $t=\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]$, obținem $2t^2+(2x-11)t+5-x=0$ **1p**

$\Delta=(2x-11)^2-4\cdot2\cdot(5-x)=(2x-9)^2$ **1p**

$t_1=\frac{1}{2}, t_2=-x+5$ **1p**

Cum $\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\frac{3x+5}{2x+1}\right]=-x+5\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ **1p**

$5-x\leq\frac{3x+5}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{3x+5}{2x+1}+x-5\geq0\Leftrightarrow\frac{2x(x-3)}{2x+1}\geq0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},0\right]\cup[3,+\infty)$.

Cum $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ **1p**

$\frac{3x+5}{2x+1}<6-x\Leftrightarrow x+4<(5-x)(2x+1)\Leftrightarrow2(x-2)^2-9<0\Leftrightarrow x\in\left(2-\frac{3}{\sqrt{2}},2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.............. **1p**

$x\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ și $x\in\left(2-\frac{3}{\sqrt{2}},2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x\in\{0,3,4\}$ care verifică ecuația **1p**

Problema 3.

O dreaptă care trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC intersectează segmentul (AB) în punctul P și segmentul (AC)în punctul Q. Notăm cu $p = \frac{PB}{PA}$ și $q = \frac{QC}{QA}$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{GP} = \frac{1-p}{1+p}\overrightarrow{GB} - \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GC}$.

b) Arătați că $p + q = 1$.

c) Arătați că BQ, CP și AG sunt concurente dacă și numai dacă $PQ \parallel BC$.

SOLUȚIE:

a) $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PA}} = -p \Rightarrow \overrightarrow{GP} = \frac{1}{1+p}\overrightarrow{GB} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GA}$.. **1p**

$\overrightarrow{GP} = \frac{1}{1+p}\overrightarrow{GB} + \frac{p}{1+p}\left(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right) = \frac{1-p}{1+p}\overrightarrow{GB} - \frac{p}{1+p}\overrightarrow{GC}$.. **1p**

b) Analog se arată că $\overrightarrow{GQ} = \frac{1-q}{1+q}\overrightarrow{GC} - \frac{q}{1+q}\overrightarrow{GB}$ **2p**

Vectorii $\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GQ}$ sunt coliniari ⇒ $\frac{\frac{1-p}{1+p}}{-\frac{q}{1+q}} = \frac{-\frac{p}{1+p}}{\frac{1-q}{1+q}} \Rightarrow \frac{1-p}{q} = \frac{p}{1-q} \Rightarrow p + q = 1$ **1p**

c) Din teorema lui Ceva și reciproca teoremei lui Ceva avem că BQ, CP și AG sunt concurente ⇔

$(-p) \cdot \left(-\frac{1}{q}\right) \cdot (-1) = -1$ **1p**

$\frac{p}{q} = 1 \Leftrightarrow p = q \Leftrightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{QC}{QA} \Leftrightarrow PQ \parallel BC$.. **1p**

Problema 4.

Pe ambele laturi ale unui unghi drept în direcția vârfului unghiului se mișcă două corpuri. Primul corp se mișcă cu viteza de 12 m/min, iar al doilea cu viteza de 16 m/min. La un moment dat distanța dintre corpuri a fost egală cu 100 m. Trei minute mai târziu distanța dintre corpuri a devenit de 40 m. La ce distanță de vârful unghiului erau situate corpurile în primul moment fixat de timp?

SOLUȚIE:

Notăm cu $x =$ distanța de la primul corp la vârful unghiului în primul moment fixat de timp, $y =$ distanța de la al doilea corp la vârful unghiului în primul moment fixat de timp.

$x^2 + y^2 = 100^2$ **1p**

$(x - 36)^2 + (y - 48)^2 = 40^2$ **1p**

$x^2 + y^2 - (x - 36)^2 - (y - 48)^2 = 8400 \Rightarrow 36(2x - 36) + 48(2y - 48) = 8400 \Longrightarrow$

$3x + 4y = 500$ **1p**

$y = 125 - \frac{3x}{4} \Rightarrow x^2 + \left(125 - \frac{3x}{4}\right)^2 = 10000 \Rightarrow x^2 - 120x + 3600 = 0$.. **2p**

$(x - 60)^2 = 0 \Rightarrow x = 60$ m **1p**

$y = 80$ m **1p**

<u>Notă.</u> Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

a) Demonstraţi că $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, oricare ar fi numerele reale *a, b* şi *c*. Când se atinge egalitatea?

b) Determinaţi numerele reale *x* pentru care $4^x+9^x+36^x=6^x+12^x+18^x$.

SOLUŢIE:

a) Inegalitatea revine la $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$. **2p**

Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$. **1p**

b) Pentru $a=2^x, b=3^x, c=6^x$, se atinge egalitatea în inegalitatea de la a). **2p**

Rezultă că $2^x=3^x=6^x$, de unde $x=0$. **2p**

Problema 2.

Se consideră numerele $a=\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ şi $b=2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3}$.

Arătaţi că $2a-b=0$.

SOLUŢIE:

Fie $x=\log_2 3$; atunci $a=(3+x)(5+x)-(6+x)(2+x)=3\in\mathbb{N}$. **3p**

Fie $u=\lg 2, v=\lg 3$; atunci $\lg b=\dfrac{\lg 18}{\lg 6}\cdot\lg 2+\dfrac{\lg 3}{\lg 6}\cdot\lg 3=\dfrac{(u+2v)\cdot u+v^2}{u+v}=\dfrac{(u+v)^2}{u+v}=u+v=\lg 6$,

prin urmare $b=6\in\mathbb{N}$. **3p**

Rezultă că $2a-b=2\cdot 3-6=0$. ....
1p

Problema 3.

a) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ este bijectivă.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$.

SOLUŢIE:

a) Funcţia f se obţine prin compunere de funcţii strict crescătoare; rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Pentru $y\in\mathbb{R}$, există $x=\frac{y^3+1}{2}\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)=y$, aşadar f este surjectivă. **3p**

b) Considerând funcţia de la a), ecuaţia se scrie sub forma $f(x)=f^{-1}(x)$, echivalentă cu $f(x)=x$....**2p**

Soluţiile acestei ecuaţii sunt $\left\{1,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **2p**

Problema 4.

Numerele complexe z_1, z_2, z_3 şi z_4 sunt astfel încât $|z_1-z_2|=2, |z_2-z_3|=\sqrt{2}, |z_3-z_4|=3\sqrt{2}$, $|z_4-z_1|=4$ şi $|z_2-z_4|=2\sqrt{5}$. Calculaţi $|z_1-z_3|$.

Gazeta Matematică 12/2018 (Supliment)

SOLUŢIE:

Considerăm punctele A,B,C,D având afixele z_1, z_2, z_3, respectiv z_4. Ipoteza problemei spune că $AB=2, BC=\sqrt{2}, CD=3\sqrt{2}, DA=4$ şi $BD=2\sqrt{5}$. **2p**

Cum $AB^2+AD^2=BC^2+CD^2=BD^2$, rezultă că $\mathrm{m}\left(\widehat{BAD}\right)=\mathrm{m}\left(\widehat{BCD}\right)=90^\circ$. **2p**

Ducem înălţimile AA' şi CC' în triunghiurile dreptunghice *ABD*, respectiv *CBD* şi considerăm proiecţia *M* a punctului *A* pe dreapta CC'. Folosind teorema catetei şi teorema înălţimii în triunghiurile *ABD* şi *CBD*, apoi teorema lui Pitagora în triunghiul *MAC*, obţinem că $AC=\sqrt{10}$, prin urmare $|z_1-z_3|=\sqrt{10}$.

.... **3p**

(Altfel: patrulaterul *ABCD* are două unghiuri opuse suplementare, deci este inscriptibil. Folosind teorema lui Ptolemeu: $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$, obţinem că $AC=\sqrt{10}$.)

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie matricele $A=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Demonstraţi că $(I_2+\mathrm{i}A)^n-(I_2+\mathrm{i}B)^n=\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)(A-B), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 11/2018 (Supliment)

SOLUŢIE:

Avem că $A^n=A$ şi $B^n=B$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. **2p**

Cu formula binomului, $(I_2+\mathrm{i}A)^n=I_2+A\left(\mathrm{C}_n^1\mathrm{i}+\mathrm{C}_n^2\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n\mathrm{i}^n\right)=$ $I_2+A\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)$ şi, analog, $(I_2+\mathrm{i}B)^n=I_2+B\left((1+\mathrm{i})^n-1\right)$. **4p**

Scăzând membru cu membru, obţinem relaţia dorită. **1p**

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ e^x, & x\geq 0\end{cases}$.

Determinaţi funcţiile $f\circ g$ şi $g\circ f$ şi studiaţi continuitatea lor.

SOLUŢIE:

$$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},(f\circ g)(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-1\right), & x\leq-\sqrt{2}\\ x^2-2, & x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$ **2p**

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$$ **2p**

Funcţiile *f* şi *g* sunt continue, cu excepţia punctelor de racordare a ramurilor, întrucât operaţiile cu funcţii elementare au ca rezultat funcţii continue. **1p**

Calculând limitele laterale şi valorile funcţiilor în punctele de racordare a ramurilor, obţinem că $f\circ g$ este continuă în $-\sqrt{2}$ şi discontinuă în 0, iar $g\circ f$ este discontinuă în 1. .... **2p**

Problema 3.

a) Dacă funcţia $f:[1,2]\to[2,5]$ este continuă, demonstraţi că ecuaţia $f(x)=x^2+1$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[1,2]$.

b) Daţi exemplu de o funcţie $g:[1,2]\to[2,5]$ pentru care ecuaţia $g(x)=x^2+1$ nu are soluţii în intervalul $[1,2]$.

SOLUŢIE:

a) Considerăm funcţia $h:[1,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-(x^2+1)$. Cum h este continuă, $h(1)=f(1)-\ -2\geq 0$ şi $h(2)=f(2)-5\leq 0$, rezultă că funcţia h se anulează pe intervalul $[1,2]$, de unde cerinţa problemei.
.... **4p**

b) Un posibil exemplu este $g:[1,2]\to[2,5]$, $g(x)=\begin{cases} 8-3x, & x\in\left[1,\frac{3}{2}\right] \\ 6-2x, & x\in\left(\frac{3}{2},2\right] \end{cases}$. **3p**

Problema 4.

Date trei numere naturale de câte trei cifre $m=\overline{abc}, n=\overline{def}$ şi $p=\overline{ghi}$, le asociem determinantul

$$\Delta(m,n,p)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

a) Dacă *m, n, p* sunt numere divizibile cu 29, arătaţi că $\Delta(m,n,p)$ este un număr divizibil cu 29.

b) Dacă *m, n, p* sunt numere prime, rezultă că $\Delta(m,n,p)$ este un număr prim?

SOLUŢIE:

a) Adunăm de 100 de ori prima coloană şi de 10 ori a doua coloană peste cea de-a treia coloană; în acest fel, putem da 29 factor comun de pe coloana a treia, prin urmare $\Delta(m,n,p)$ este un număr divizibil cu 29.
.... **4p**

b) Nu neapărat: de exemplu, $\Delta(101,103,107)=0$, care nu este număr prim. **3p**

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Fie n un număr natural impar. Pe $\mathbb{R}$, definim operația algebrică $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $\mathbb{R},*$ este grup.

b) Demonstrați că $\mathbb{R},* \cong \mathbb{R},+$.

c) Pentru $n = 2019$, rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * ... * x}_{2019\, ori} = 2019.$

SOLUȚIE:

a) Se verifică axiomele grupului.. **2p**

b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n$ impar. Evident, f este bijectivă **2p**

$f(x * y) = f\ \sqrt[n]{x^n + y^n} = x^n + y^n = f(x) + f(y)$ **1p**

c) $\underbrace{x * x * ... * x}_{2019\, ori} = \sqrt[2019]{2019 x^{2019}} = 2019 \Rightarrow x = \sqrt[2019]{2019^{2018}}$ **2p**

Problema 2.

Fie $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} | \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b = c + d \right\}.$

a) Demonstrați că M_1, M_2 au structuri de monoid, relativ la operația de înmulțire.

b) Determinați mulțimile elementelor simetrizabile $U\ M_1\ , U\ M_2$.

SOLUȚIE:

a) Se verifică axiomele monoidului **2p**

b) $\frac{1}{ab}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{bc} \in \mathbb{Z}$ **1p**

$$U\ M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

.... **2p**

$$U\ M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix} | \, a \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix} | \, a \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & -1-a \\ a-1 & -a \end{pmatrix} | \, a \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & -1-a \\ a+1 & -2-a \end{pmatrix} | \, a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

.... **2p**

Problema 3.

Fie $f: -a,a \to \mathbb{R}$ o funcție pară și continuă, $a>0$.

a) Demonstrați că $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx, (\forall)k \in \mathbb{R}.$

b) Calculați $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ \ e^{2019x}+1}dx.$

SOLUȚIE:

a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$ **1p**

Alegem $x=-t$ și obținem că $\displaystyle\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx = -\int_{a}^{0} \frac{f(-t)}{1+e^{-kt}}dt \overset{f\ \text{pară}}{=} \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+\frac{1}{e^{kt}}}dt = \int_{0}^{a} \frac{f(t)e^{kt}}{1+e^{kt}}dt = \int_{0}^{a} \frac{f(x)e^{kx}}{1+e^{kx}}dx$

.... **3p**

Finalizare.. **1p**

b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ \ e^{2019x}+1}dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$ **2p**

Problema 4.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}\ \{x\}-2\ +2.$

a) Demonstrați că *f* este periodică de perioadă $T=1.$

b) Calculați $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx$ și $\displaystyle\int_{-2019}^{2019} f(x)dx.$

SOLUȚIE:

a) $f(x+1)=\{x+1\}(\{x+1\}-2)+2=\{x\}(\{x\}-2)+2=f(x)$ **2p**

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} x(x-2)+2\ \ dx = \frac{4}{3}.$ **1p**

$\displaystyle\int_{-2019}^{2019} f(x)dx = \int_{-2019}^{-2018} f(x)dx + \int_{-2018}^{-2017} f(x)dx + ... + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + ... + \int_{2018}^{2019} f(x)dx$ **2p**

Din faptul că *f* este periodică de perioadă T = 1, obținem că

$\displaystyle\int_{-2019}^{2019} f(x)dx = 4038\int_{0}^{1} f(x)dx = 5384$ **2p**

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***