Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

Soluţii şi barem orientativ de corectare la CLASA a XI-a

Problema 1. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că şirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita nenulă. Calculaţi limita*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

Gazeta Matematică

Soluţie şi barem:
Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$. Dacă $L<0$, există $n_0\in\mathbb{N}$, astfel încât $a_{n+1}-a_n<\frac{L}{2}$, $\forall n\geq n_0$. Rezultă că $a_n<a_{n_0}+(n-n_0)\cdot\frac{L}{2}, \forall n>n_0$. Atunci, pentru $n>n_0-\frac{2a_{n_0}}{L}$, obţinem $a_n<0$, în contradicţie cu ipoteza. Deci $L>0$. .... 1p.
Conform teoremei Stolz-Cesàro, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=L$. .... 1p.
Deoarece $L>0$, există $n_0\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea că $a_{n+1}-a_n>\frac{L}{2}$, $\forall n>n_0$. Rezultă că $a_n>a_{n_0}+(n-n_0)\cdot\frac{L}{2}$, $\forall n>n_0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. 1p
Pentru $n>n_0$ avem $a_{n+1}-a_n>0$ şi

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}\cdot(a_{n+1}-a_n)}.$$

.... 2p
Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=0$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=e^{\frac{1}{L}\cdot L}=e.$$

.... 2p

Problema 2. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, şi $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că există un număr complex z, cu $|z|=1$, având proprietatea că*

$$Re(\det(A+zB))\geq\det(A)+\det(B),$$

unde $Re(w)$, reprezintă partea reală a numărului complex w.

Soluţie şi barem: Notăm $f(z)=det(A+zB)$, pentru $z\in\mathbb{C}$.
Din proprietăţile determinanţilor, există $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(z)=\det(A)+a_1\cdot z+a_2\cdot z^2+\cdots+a_{n-1}\cdot z^{n-1}+\det(B)\cdot z^n\ ,\ \text{pentru orice } z\in\mathbb{C}.$$

.... 2p

Fie ε o rădăcină primitivă de ordinul n a unităţii. Atunci, pentru orice $1 \leq k \leq n-1$, are loc

$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)k}=\frac{1-\varepsilon^{nk}}{1-\varepsilon^k}=0.$$

.... 1p

Obţinem

$$f(1)+f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)+\cdots+f(\varepsilon^{n-1})=n(\det(A)+\det(B))+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)k})=$$

$$=n\cdot(\det(A)+\det(B)).$$

.... 2p

Atunci

$$\frac{Re(f(1))+Re(f(\varepsilon))+Re(f(\varepsilon^2))+\cdots+Re(f(\varepsilon^{n-1}))}{n}=\frac{1}{n}\cdot Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(\varepsilon^k)\right)=$$

$$=\det(A)+\det(B).$$

.... 1p

Fie $k_0 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, astfel încât $Re(f(\varepsilon^{k_0}))=\max\{Re(f(\varepsilon^k))\,|\,k=\overline{0,n-1}\}$.
Atunci $|\varepsilon^{k_0}|=1$ şi

$$Re(\det(A+\varepsilon^{k_0}\cdot B))\geq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}Re(f(\varepsilon^k))=\det(A)+\det(B).$$

.... 1p

Problema 3. *Fie n un număr natural impar şi matricele $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $(A-B)^2=O_n$. Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.*

Soluţie şi barem: Fie $C=A-B$. Conform ipotezei, $C^2=O_n$. Din teorema lui Sylvester obţinem

$$2\cdot rang(C)-n\leq rang(O_n)=0,$$

astfel că $rang(C)\leq\frac{n}{2}$. 2p

Deoarece n este impar, rezultă $rang(C)\leq\frac{n-1}{2}$. 1p

Are loc egalitatea $AB-BA=CA-AC$, ... 1p

Astfel, deoarece pentru orice $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au loc inegalităţile

$$rang(X\pm Y)\leq rang(X)+rang(Y)\quad \text{şi}\quad rang(XY)\leq\min(rang(X),rang(Y)),$$

avem:

$$rang(AB-BA)=rang(CA-AC)\leq rang(CA)+rang(AC)\leq$$

$$\leq 2\cdot rang(C)\leq n-1<n.$$

.... 2p

Rezultă că $\det(AB-BA)=0$. 1p

Problema 4. *Fie $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie continuă, cu $f(0) > 0$ şi cu proprietatea că pentru orice $0 \le x < y$ au loc inegalităţile $x - y < f(y) - f(x) \le 0$. Arătaţi că:*
a) Există un unic număr $\alpha \in (0,\infty)$ cu proprietatea că $(f \circ f)(\alpha) = \alpha$.
b) Şirul $(x_n)_{n\ge1}$, definit prin $x_1 \ge 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

Soluţie şi barem: a) Conform ipotezei, funcţia f este descrescătoare.
Funcţia f fiind continuă, funcţia $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x) - x$, pentru orice $x \ge 0$, este continuă. Pentru $0 \le x < y$ avem $g(x) - g(y) = f(x) - f(y) + y - x > 0$, astfel că g este strict descrescătoare. 1p
Avem $g(0) = f(0) - 0 > 0$ şi $g(a) = f(a) - a \le f(0) - a < 0$, pentru un număr $a > f(0)$. Din proprietatea valorilor intermediare rezultă că există $\alpha \in (0,a) \subset (0,\infty)$ cu proprietatea $g(\alpha) = 0$, de unde $f(\alpha) = \alpha$. Monotonia strictă a lui g implică unicitatea punctului fix α al funcţiei f. 1p
Rezultă $(f \circ f)(\alpha) = \alpha$. (1)
Pentru $x \in [0,\alpha)$, folosind de două ori inegalităţile din ipoteză, obţinem

$$x - \alpha < f(\alpha) - f(x) \le f(f(x)) - f(f(\alpha)) = f(f(x)) - \alpha \le 0,$$

de unde $x < f(f(x)) \le \alpha$. (2)
Analog, pentru $x \in (\alpha,\infty)$ avem

$$\alpha - x < f(x) - f(\alpha) \le f(f(\alpha)) - f(f(x)) = \alpha - f(f(x)) \le 0,$$

astfel că $x > f(f(x)) \ge \alpha$. (3)
Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă că funcţia $f \circ f$ are ca unic punct fix numărul α. 2p
b) Dacă $x_1 = \alpha$, atunci $x_n = \alpha$ pentru orice $n \ge 1$, deci şirul este convergent la α.
Dacă $x_1 \ne \alpha$, considerăm subşirurile $(x_{2n-1})_{n\ge1}$ şi $(x_{2n})_{n\ge1}$. Acestea verifică relaţiile de recurenţă $x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1})$, respectiv $x_{2n+2} = (f \circ f)(x_{2n})$, pentru orice $n \ge 1$.
Pentru $x_1 < \alpha$, din monotonia funcţiei f avem $x_2 \ge \alpha$. Prin inducţie, folosind relaţiile (2) şi (3), rezultă că şirul $(x_{2n-1})_{n\ge1}$ este monoton crescător şi mărginit superior de α, iar şirul $(x_{2n})_{n\ge1}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior de α. Ele sunt deci convergente cu limitele l_1 şi respectiv l_2, cu $l_1 \le \alpha \le l_2$. Folosind continuitatea funcţiei $f \circ f$, trecând la limită în relaţiile de recurenţă, se obţine $l_1 = (f \circ f)(l_1)$ şi $l_2 = (f \circ f)(l_2)$. Rezultă că $l_1 = \alpha = l_2$. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent, cu limita α.
Cazul $x_1 > \alpha$ se tratează analog. 3p