Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a X-a
Soluţii şi bareme

Problema 1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, cu proprietatea

$$2^{-x-y} \leq \frac{f(x)f(y)}{(x^2+1)(y^2+1)} \leq \frac{f(x+y)}{(x+y)^2+1},$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Arătăm că $f(x) = 2^{-x}(x^2+1)$ 1p

Dacă $x = y = 0$ obţinem $1 \leq f(0)^2 \leq f(0)$, de unde rezultă $f(0) = 1$ 1p

Dacă $y = 0$ în relaţia dată, obţinem

$$2^{-x} \leq \frac{f(x)}{x^2+1}, (*)$$

pentru orice x 1p

Pentru $y = -x$ în relaţia din enunţ. avem

$$1 = 2^{-x+x} \leq \frac{f(x)}{x^2+1} \cdot \frac{f(-x)}{x^2+1} \leq 1.$$

.... 1p

În final, folosind (*), rezultă că fiecare inegalitate din produsul de mai sus devine egalitate, deci $f(x) = 2^{-x}(x^2+1)$ 3p

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

a) Să se arate că există $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \ldots + \frac{z_{n-1}}{z_n} + \frac{z_n}{z_1} = ni.$$

b) Care sunt valorile lui n pentru care există numere complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, de acelaşi modul, astfel încât

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \cdots + \frac{z_{n-1}}{z_n} + \frac{z_n}{z_1} = ni?$$

Soluţie. a) Alegem $z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1} = 1$ şi căutăm $z = z_n \in \mathbb{C}$ care să verifice relaţia din enunţ. Obţinem $n - 2 + \frac{1}{z} + z = ni$, adică $z^2 + (n-2-ni)z + 1 = 0$, ecuaţie care are rădăcini în mulţimea $\mathbb{C}$. .... 2p.

b) Presupunem că există numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, de acelaşi modul care verifică relaţia din enunţ. Numerele $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, \frac{z_n}{z_1}$ au modulul 1 şi din inegalitatea modulului rezultă ca $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_3} = \ldots = \frac{z_{n-1}}{z_n} = \frac{z_n}{z_1} = i$. 3p

Prin înmulţire obţinem $i^n = 1$, deci n este multiplu de 4 .... 1p

Pentru $n = 4k$ alegem k grupe de patru dintre numerele $-\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1$, care verifică relaţia 1p

Problema 3. Fie a, b, c numere complexe distincte, cu proprietatea $|a| = |b| = |c| = 1$. Arătaţi că dacă $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$, atunci punctele de afixe a, b, c sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluţie. Fie A, B, C punctele de afixe a, b, c, aflate pe cercul unitate cu centrul O. Afixul ortocentrului H al triunghiului ABC este $a+b+c$, deci mijlocul ω al segmentului OH are afixul $\frac{1}{2}(a+b+c)$ 1p

Deducem că $A\omega = |\frac{a+b+c}{2} - a| = \frac{1}{2}|b+c-a|$, deci $|b+c-a|^2 = 4A\omega^2$ şi analoagele.

Rezultă $A\omega^2 + B\omega^2 + C\omega^2 = 3$. 3p

Din teorema medianei, avem $A\omega^2 = \frac{1}{4}(2AH^2 + 2AO^2 - OH^2)$. Folosind relaţiile $OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$, $AH^2 = 4R^2 - BC^2$ şi analoagele, deducem $A\omega^2 = \frac{1}{4}(1 + AB^2 + AC^2 - BC^2)$ 2p

de unde $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 9$, deci $OH = 0$. Rezltă $O = H$, adică ABC e echilateral 1p

Problema 4. Să se găsească cel mai mic număr real strict pozitiv λ astfel încât, pentru orice numere reale $a_1, a_2, a_3 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ şi $b_1, b_2, b_3 \in (0, \infty)$ cu $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = \sum\limits_{i=1}^{3} b_i = 1$, avem

$$b_1 b_2 b_3 \leq \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3).$$

Soluţie. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{b_1 b_2 b_3}{x}$. Funcţia f este convexă 1p

Aplicăm inegalitatea Jensen: $\dfrac{b_1 b_2 b_3}{\sum\limits_{i=1}^{3} a_i b_i} = f(\sum\limits_{i=1}^{3} a_i b_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{3} a_i f(b_i)$ 1p

Presupunem că $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Atunci $f(b_1) \geq f(b_2) \geq f(b_3)$.

Avem

$$\begin{aligned}
\frac{b_1 b_2 b_3}{\sum\limits_{i=1}^{3} a_i b_i} &\leq a_1 f(b_1) + a_2 f(b_2) + a_3 f(b_3) \\
&\leq a_1 f(b_1) + (a_2 + a_3) f(b_2) \\
&= a_1 f(b_1) + (1 - a_1) f(b_2) \\
&= f(b_2) + a_1 (f(b_1) - f(b_2)) \\
&\leq f(b_2) + \frac{1}{2}(f(b_1) - f(b_2)) \\
&= \frac{1}{2}(b_1 + b_2) b_3 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

În ultima inegalitate am folosit inegalitatea mediilor şi condiţia din enunţ. 3p

Se verifică uşor că pentru $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$ şi $b_1 = b_2 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{1}{2}$, se realizează egalitatea. 1p

Constanta λ cerută este $\lambda = \frac{1}{8}$. 1p