Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019
Clasa a IX-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, respectiv $b_1, b_2, ..., b_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = S$.

a) Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geq \frac{S}{2}$.

b) Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k+b_k}$.

Soluţie şi barem:

a) Avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k} = \frac{S^2}{2S} = \frac{S}{2}$. **4p**

b) Avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 - b_k^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = S - S = 0$ de unde obţinem concluzia. **3p**

Problema 2. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. În planul triunghiului ABC considerăm un punct X astfel încât triunghiul XAH este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AH, iar B şi X sunt de o parte şi de alta a dreptei AH. Demonstraţi că $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XB}$ dacă şi numai dacă $\measuredangle BAC = 45°$.

Soluţie şi barem: Cum $BA \perp HC$ şi $BC \perp HA$, deducem că B este ortocentrul triunghiului HAC. **2p**

Relaţia $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XB}$ are loc dacă şi numai dacă X este centrul cercului circumscris triunghiului ACH. **1p**

Dacă X este centrul cercului circumscris triunghiului AHC, atunci $\measuredangle AXH$ este unghi la centru, deci arcul aferent are $90°$, deci $\measuredangle ACH = 45°$. Obţinem că $\measuredangle BAC = 45°$. **2p**

Reciproc, fie Y centrul cercului circumscris triunghiului AHC. Atunci $\measuredangle AYH = 2\measuredangle ACH = 90°$. Triunghiul YAH este dreptunghic isoscel, deci $Y = X$. Atunci X este centrul cercului circumscris triunghiului AHC. **2p**

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale cu proprietatea

$$2(a_1 + a_2 + ... + a_n) = na_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$.

a) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică.

b) Dacă $[a_1] + [a_2] + ... + [a_n] = [a_1 + a_2 + ... + a_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că toţi termenii şirului sunt numere întregi. (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Soluţie şi barem:

a) Pentru $n = 1$ obţinem $a_2 = 2a_1$, iar pentru $n = 2$ obţinem $a_3 = 3a_1$. Prin inducţie matematică demonstrăm că $a_n = na_1$, pentru orice $n \geq 1$, de unde deducem că şirul este o progresie aritmetică. **2p**

b) Fie $\alpha = \{a_1\}$. Relaţia $[x+y] = [x] + y$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{Z}$, ipoteza şi punctul precedent conduc la egalitatea

$$[\alpha] + [2\alpha] + ... + [n\alpha] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\alpha\right],$$

pentru orice $n \geq 1$. **1p**

Pentru $n = 2$ obţinem $[\alpha] + [2\alpha] = [3\alpha]$, deci $[2\alpha] = [3\alpha]$, adică $\alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Cazul $n = 3$ conduce la $[\alpha] + [2\alpha] + [3\alpha] = [6\alpha]$. Atunci $2[3\alpha] = [6\alpha]$. Această egalitate conduce la $\alpha \in \left[0, \frac{1}{6}\right)$. . **2p**

Presupunem că $\alpha \neq 0$. Atunci există $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 7$ cu $\frac{1}{p} \leq \alpha < \frac{1}{p-1}$. Atunci $[\alpha] + [2\alpha] + ... + [p\alpha] = [p\alpha] = 1$. Apoi $\frac{p(p+1)}{2}\alpha \geq \frac{p+1}{2} \geq 4$, deci egalitatea din enunţ nu este satisfăcută pentru $n = p$.

Rămâne $\alpha = 0$, ceea ce conduce la concluzie **2p**

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^n + 3^n$ să dividă numărul $p^{n+1} + 3^{n+1}$.

Soluţie şi barem: Avem egalitatea $p^{n+1} + 3^{n+1} = (p^n + 3^n)(p+3) - 3p(p^{n-1} + 3^{n-1})$.

Dacă $p^n + 3^n$ divide numărul $p^{n+1} + 3^{n+1}$, atunci $p^n + 3^n$ divide pe $3p(p^{n-1} + 3^{n-1})$. Dacă presupunem că p şi 3 sunt prime între ele, atunci $p^n + 3^n$ va fi prim şi cu 3 şi cu p. Obţinem că $p^n + 3^n$ divide pe $p^{n-1} + 3^{n-1}$, ceea ce este fals deoarece $p^n + 3^n > p^{n-1} + 3^{n-1} > 0$. De aici obţinem că p este divizibil cu 3. .... **3p**

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p = 3k$. Atunci $3^n(k^n + 1) \,|\, 3 \cdot 3k \cdot 3^{n-1}(k^{n-1} + 1)$, de unde obţinem că $k^n + 1 \,|\, 3k^n + 3k$, adică $k^n + 1 \,|\, 3k^n + 3 + 3k - 3$. Atunci $k^n + 1 \,|\, 3k - 3$. Pentru $n \geq 2$, avem $k^n + 1 \geq k^2 + 1 > 3k - 3$, deci rămâne $3k - 3 = 0$ sau $n = 1$. **2p**

Primul caz conduce la $p = 3$, iar proprietatea din enunţ este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

În al doilea caz, din $k + 1 \,|\, 3k - 3$ obţinem $k \in \{1, 2, 5\}$, deci $p \in \{3, 6, 15\}$. **2p**