Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a VII-a - SOLUŢII şi BAREME

Problema 1. Determinaţi numerele întregi a, b, c pentru care

$$\frac{a+1}{3}=\frac{b+2}{4}=\frac{5}{c+3}.$$

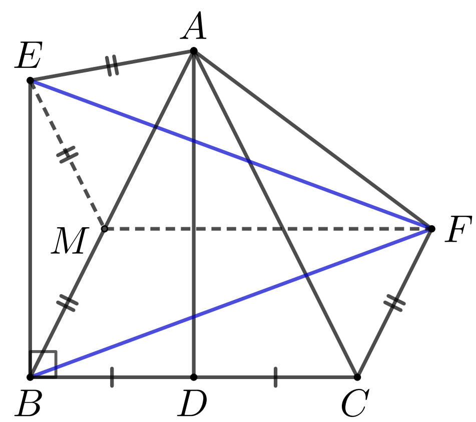
Gazeta Matematică

Soluţie şi barem de corectare
Deoarece $(3,4)=1$, din $3(b+2)=4(a+1)$ rezultă $3 \mid a+1$, deci valoarea comună a fracţiilor din enunţ este număr întreg. **2p**
Deducem că $c+3 \mid 5$, deci $c+3 \in \{-5,-1,1,5\}$, adică $c \in \{-8,-4,-2,2\}$. **3p**
În cazul $c=-8$ se găsesc $a=-4$, $b=-6$; în cazul $c=-4$ se obţin $a=-16$, $b=-22$; în cazul $c=-2$ se găsesc $a=14$ şi $b=18$, iar în cazul $c=2$ se obţine $a=b=2$. ... **2p**

Remarcă: O altă cale de a arăta că valoarea comună a fracţiilor din enunţ este număr întreg este:
$\dfrac{a+1}{3}=\dfrac{b+2}{4}=\dfrac{(b+2)-(a+1)}{4-3}=b-a+1 \in \mathbb{Z}$. **2p**

Problema 2. Se consideră D mijlocul bazei $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC în care $m(\angle BAC)<90^\circ$. Pe perpendiculara în B pe dreapta BC se consideră punctul E astfel încât $\angle EAB \equiv \angle BAC$, iar pe paralela prin C la dreapta AB se consideră punctul F astfel încât F şi D sunt de o parte şi de alta faţă de dreapta AC şi $\angle FAC \equiv \angle CAD$. Demonstraţi că $AE=CF$ şi $BF=EF$.

Soluţie şi barem de corectare
Notând $m(\angle BAD)=m(\angle CAD)=\alpha$, avem $m(\angle EAB)=2\alpha$, $m(\angle EBA)=\alpha$, $m(\angle ACF)=2\alpha$ şi $m(\angle CAF)=\alpha$, deci triunghiurile EBA şi FAC sunt congruente (ULU). Deducem că $AE=CF$. **3p**
Fie M punctul în care mediatoarea segmentului $[BE]$ intersectează dreapta AB. Atunci $MB=ME$, deci $m(\angle MBE)=m(\angle MEB)=\alpha$, $m(\angle EMA)=2\alpha=m(\angle EAM)$. Rezultă că $BM=EM=AE=CF$, deci $MBCF$ este paralelogram. Cum $BE \perp BC$, deducem că $MF \perp BE$, deci MF este mediatoarea segmentului $[BE]$, de unde concluzia.
.... **4p**



Problema 3. Se consideră mulţimile $M = \{0, 1, 2, \ldots, 2019\}$ şi

$$A = \left\{ x \in M \;\middle|\; \frac{x^3 - x}{24} \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Câte elemente are mulţimea A?
b) Determinaţi cel mai mic număr natural n, $n \geq 2$, care are proprietatea că orice submulţime cu n elemente a mulţimii A conţine două elemente distincte a căror diferenţă se divide cu 40.

Soluţie şi barem de corectare
a) Numărul $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x - 1)x(x + 1)$ este un produs de trei numere naturale consecutive, deci $3 \mid x^3 - x$.
Dacă $x \in A$ este par, cum $x - 1$ şi $x + 1$ sunt impare, trebuie ca x să fie multiplu de 8.
Dacă $x \in A$ este impar, numerele $x - 1$ şi $x + 1$ sunt pare, iar unul din ele este divizibil cu 4, deci $x^3 - x$ este divizibil cu 8.
Prin urmare, $x \in A$ dacă şi numai dacă $x \in M$ este impar sau divizibil cu 8. .... **1p**
În M sunt 1010 numere impare şi 253 divizibile cu 8, deci A are în total 1263 elemente.
.... **2p**

b) Vom demonstra că cea mai mică valoare a lui n este 26.
Deoarece orice număr din A dă unul din resturile 0, 1, 3, 5 şi 7 la împărţirea cu 8, la împărţirea cu 40 el poate da oricare din următoarele resturi: 0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 37 sau 39 (impar sau multiplu de 8), adică oricare din 25 resturi posibile. **2p**
Pentru $n \leq 25$ găsim în A n numere care dau resturi diferite la împărţirea cu 40. ... **1p**
Dacă $n = 26$, din principiul cutiei rezultă că în orice submulţime cu n elemente a lui A există două care dau acelaşi rest la împărţirea cu 40, deci a căror diferenţă este divizibilă cu 40. .... **1p**

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $m(\widehat{A}) = 90°$, şi punctul $D \in (AB)$ astfel încât $AD = \frac{1}{3}AB$. În semiplanul determinat de dreapta AB şi punctul C se consideră punctul E pentru care $m(\angle BDE) = 60°$ şi $m(\angle DBE) = 75°$. Dreptele BC şi DE se intersectează în punctul G, iar paralela prin punctul G la dreapta AC intersectează dreapta BE în punctul H.
Demonstraţi că triunghiul CEH este echilateral.

Soluţie şi barem de corectare
Fie $\{M\} = DE \cap AC$. Cum $m(\angle AMD) = 30°$, avem $DM = 2AD = DB$, de unde decucem că $(ME$ este bisectoarea unghiului $\angle AMB$. **2p**
De asemenea, $(BE$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle ABM$. Rezultă că E aparţine bisectoarei exterioare a unghiului $\angle MAB$, adică AE este mediatoarea segmentului $[BC]$. Prin urmare, $BE = CE$ şi $m(\angle ECB) = 30°$. **1p**
Dacă H' este simetricul lui B faţă de E, triunghiul CEH' este echilateral. Demonstrăm că $H'G \parallel AC$, ceea ce arată că $H' = H$.
În triunghiul CGE, $m(\angle ECG) = 30°$ şi $m(\angle EGC) = 75°$, deci $m(\angle CEG) = 75°$, de unde $CG = CE = CH'$. Triunghiul CGH' este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle CGH') = 45° = m(\angle GCA)$, adică $GH' \parallel AC$. **4p**