Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi pentru câte triplete (m, n, p) de numere naturale nenule mai mici sau egale cu 5 numărul

$$A = 2^m + 3^n + 5^p$$

este divizibil cu 10.

Prelucrare Gazeta Matematică

Soluţie. Ultima cifră a lui A este 0 şi ultima cifră a lui 5^p este 5 (indiferent de valoarea lui p), deci ultima cifră a sumei $2^m + 3^n$ este egală cu 5 .... **2p**

Ultimele cifre ale numerelor 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, respectiv 2^5 sunt 2, 4, 8, 6, respectiv 2 **1p**

Ultimele cifre ale numerelor 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, respectiv 3^5 sunt 3, 9, 7, 1, respectiv 3 **1p**

Ca urmare, perechea (m, n) poate fi aleasă în 7 moduri şi anume: $(1, 1)$; $(1, 5)$; $(2, 4)$; $(3, 3)$; $(4, 2)$; $(5, 1)$; $(5, 5)$ **2p**

Deoarece p poate fi oricare dintre numerele 1, 2, 3, 4 sau 5, există $7 \cdot 5 = 35$ de triplete (m, n, p) cu proprietatea din enunţ **1p**

Problema 2. La ora de matematică, fiecare din cei 25 de elevi ai clasei a V-a primeşte câte un cartonaş pe care este scris un număr natural nenul. Fiecare elev împarte numărul de pe cartonaş la 24 şi comunică profesorului restul obţinut la împărţire. Suma resturilor obţinute este 288. Elevul Daniel constată că resturile obţinute de colegii săi sunt diferite două câte două, iar câtul şi restul obţinute de el sunt egale.

a) Ce număr este scris pe cartonaşul lui Daniel?

b) Aflaţi suma numerelor scrise pe cele 25 de cartonaşe, ştiind că fiecare elev, în afara lui Daniel, a obţinut câtul cu 1 mai mare decât restul.

Soluţie. a) Cei 24 de colegi ai lui Daniel au obţinut cele 24 de resturi diferite posibile la împărţirea cu 24, şi anume 0, 1, 2, ..., 23 .... **1p**

Rezultă că restul obţinut de Daniel este $288 - (0 + 1 + 2 + 3 + ... + 23) = 12$ ... **1p**

Ca urmare, pe cartonaşul lui Daniel se află scris numărul $24 \cdot 12 + 12 = 300$ **1p**

b) Dacă unul din colegii lui Daniel a obţinut restul r, $0 \leq r \leq 23$, la împărţirea cu 24, atunci pe cartonaşul său este scris numărul $24 \cdot (r + 1) + r = 25r + 24$ **1p**

De aici obţinem că suma numerelor de pe cartonaşele colegilor este:

$$\begin{aligned} S &= (25 \cdot 0 + 24) + (25 \cdot 1 + 24) + (25 \cdot 2 + 24) + ... + (25 \cdot 23 + 24) = \\ &= 25 \cdot (1 + 2 + ... + 23) + 24 \cdot 24 = 7476. \end{aligned}$$

.... **2p**

Suma numerelor scrise pe cele 25 de cartonaşe este $7476 + 300 = 7776$ **1p**

Problema 3. La un turneu de şah, fiecare dintre participanţi a jucat cu fiecare alt participant câte o partidă. La finalul turneului, organizatorul a jucat şi el câte o partidă cu câţiva dintre participanţi, astfel că în total s-au jucat 100 de partide.

Care a fost numărul participanţilor şi câte partide a jucat organizatorul turneului?

Soluţie. Dacă numărul participanţilor este n, atunci numărul partidelor jucate de participanţi între ei este $1 + 2 + ... + (n-1) = (n-1) \cdot n : 2$ **2p**

Numărul total de partide este strict mai mic decât 100, deci $(n-1) \cdot n < 200$, de unde rezultă $n \leq 14$ **2p**

Presupunând $n \leq 13$, numărul partidelor jucate de participanţi între ei este cel mult egal cu $12 \cdot 13 : 2 = 78$, atunci numărul partidelor jucate de organizator ar fi cel puţin egal cu 22, care este mai mare decât numărul participanţilor, în contradicţie cu ipoteza problemei **2p**

Pentru $n = 14$, participanţii la turneu joacă 91 de partide între ei, iar organizatorul joacă 9 partide **1p**

Problema 4. a) Determinaţi numerele de 4 cifre scrise în baza 10 a căror scriere în baza 2 conţine doar cifra 1.

b) Aflaţi câte numere de patru cifre scrise în baza 10 se scriu în baza 2 folosind exact o cifră 0.

Soluţie. a) Scriind în baza 10 un număr scris cu n cifre de 1 în baza 2, avem: $\overline{11...1}_{(2)} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1$ **1p**

Numerele de patru cifre de forma $2^n - 1$ sunt $2^{10} - 1 = 1023$, $2^{11} - 1 = 2047$, $2^{12} - 1 = 4095$ şi $2^{13} - 1 = 8191$ **1p**

b) Numerele care se scriu în baza 2 folosind o singură cifră 0 se pot exprima ca diferenţa dintre două numere dintre care descăzutul D se scrie în baza 2 doar cu cifra 1, iar scăzătorul S se scrie în baza 2 folosind doar o cifră 1, urmată eventual de câteva zerouri:

$$\overline{\underbrace{11...1}_{k \text{ cifre}}0\underbrace{1..1}_{p \text{ cifre}}} = \overline{\underbrace{11...1}_{k \text{ cifre}}1\underbrace{1..1}_{p \text{ cifre}}} - \overline{1\underbrace{0..0}_{p \text{ cifre}}}$$

.... **1p**

Trecând în baza 10, descăzutul D este un număr de forma $2^n - 1$, iar scăzătorul S este de forma 2^p, unde $0 \leq p \leq n-2$, deoarece pentru $p = n-1$ diferenţa este egală cu $2^{n-1} - 1$, care se scrie doar cu cifre de 1. Rezultă că diferenţa $D - S$ este cuprinsă între $2^n - 1 - 2^{n-2}$ şi $2^n - 2$ şi, întrucât $D - S$ este număr de patru cifre, obţinem $2^n - 2 \geq 1000$ şi $2^n - 1 - 2^{n-2} \leq 9999$, de unde $10 \leq n \leq 13$ **1p**

Dacă descăzutul D este $2^{10} - 1 = 1023$, pentru ca diferenţa să aibă patru cifre, scăzătorul S poate lua doar valorile 1, 2, 4, 8 sau 16 (5 posibilităţi). Dacă $D = 2^{11} - 1$, atunci scăzătorul S poate fi 1, 2, 2^2, ..., 2^9 (10 posibilităţi), pentru $D = 2^{12} - 1$ sunt 11 variante de alegere a lui S, iar pentru $D = 2^{13} - 1$, scăzătorul poate fi ales în 12 moduri.

Aşadar, sunt $5 + 10 + 11 + 12 = 38$ de numere de patru cifre care se scriu în baza 2 cu o singură cifră 0 .... **3p**