Ministerul Educației Naționale — romania2019.eu — Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a VI-a – soluţii

Problema 1. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\widehat{A_0OA_1} = 1°$, $\widehat{A_1OA_2} = 2°$, $\widehat{A_2OA_3} = 3°, \ldots, \widehat{A_{25}OA_{26}} = 26°$ şi $\widehat{A_{26}OA_0}$.

a) Determinaţi măsura unghiului $\widehat{A_{26}OA_0}$.

b) Pentru câte valori ale numărului natural n, $1 \leq n \leq 25$, avem $\widehat{A_0OA_n} > \widehat{A_0OA_{n+1}}$?

Gazeta Matematică

Soluţie. a) $\widehat{A_{26}OA_0} = 360° - (\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \ldots + \widehat{A_{25}OA_{26}})$ **1p**

$\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \ldots + \widehat{A_{25}OA_{26}} = 1° + 2° + \ldots + 26° = 351°$; $\widehat{A_{26}OA_0} = 9°$ **2p**

b) Fie $S_n = \widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \ldots + \widehat{A_{n-1}OA_n}$. Relaţia dată este adevărată atunci când $S_n \geq 180°$, precum şi când $S_n \leq 180° \leq S_{n+1}$, iar $360° - S_{n+1} < S_n$ **2p**

În primul caz obţinem $\frac{n(n+1)}{2} \geq 180$, de unde $n \geq 19$, deci $n \in \{19, 20, \ldots, 25\}$ **1p**

În al doilea caz obţinem $\frac{n(n+1)}{2} \leq 180 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, de unde $n = 18$, care verifică şi ultima condiţie. În final, $n \in \{18, 19, 20, \ldots, 25\}$ **1p**

Problema 2. O mulţime M de numere întregi are proprietăţile:

i) 1 este element al lui M;

ii) dacă x şi y sunt elemente ale lui M, atunci $2x + 3y$ este element al lui M;

iii) dacă x, y sunt numere întregi şi $4x - 3y$ este element al lui M, atunci $x \cdot y$ este element al lui M.

Arătaţi că mulţimea M conţine numerele 2, 3, 4, 5 şi 2019.

Soluţie. Din i) şi ii) reiese $5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \in M$ **1p**

Din iii) şi $5 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \in M$ reiese $2 \cdot 1 = 2 \in M$ **1p**

Din iii) şi $2 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \in M$ reiese $2 \cdot 2 = 4 \in M$ **1p**

Din iii) şi $4 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \in M$ reiese $1 \cdot 0 = 0 \in M$. Folosind acum ii) obţinem $3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \in M$ **1p**

Pentru ultima cerinţă, deoarece $2019 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 673$, este suficient să arătăm că $673 \in M$. Apoi, din $673 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 223$, $223 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 73$, $73 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 23$, deducem că este suficient să arătăm că $23 \in M$. Cum $23 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ şi $4, 5 \in M$, problema este rezolvată **3p**

Problema 3. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

a) Daţi exemplu de submulţime B cu 11 elemente, a mulţimii A, având proprietatea: *oricum am lua două elemente din B, cel mai mare divizor comun al lor este cel puţin* 9.

b) Arătaţi că, oricum am alege o submulţime C cu 11 elemente, a mulţimii A, există două elemente distincte din C al căror cel mai mare divizor comun este cel mult 9.

Soluţie. a) Luăm B formată din cei 11 multipli ai lui 9, aflaţi în A **1p**

b) Observăm că, dacă $a > b$, atunci $(a, b) \leq a - b$ **2p**

Dacă împărţim A în 10 grupe de câte 10 numere consecutive, există o grupă care conţine două elemente din C **2p**

Diferenţa acestor elemente este cel mult 9, deci, conform observaţiei, cel mai mare divizor comun al lor este cel mult 9 .... **2p**

Problema 4. O mulţime va fi numită *interesantă* dacă elementele ei sunt numere prime şi este îndeplinită condiţia:

> *oricum am alege trei elemente distincte ale mulţimii, suma numerelor alese este număr prim.*

Determinaţi care este numărul maxim de elemente pe care le are o mulţime interesantă.

Soluţie. Răspunsul este patru **1p**

Să arătăm că din orice mulţime de cinci numere putem alege trei astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 3.

Într-adevăr, dacă trei dintre numerele alese dau acelaşi rest la împărţirea cu 3, atunci suma lor este divizibilă cu 3. În caz contrar, pentru fiecare rest la împărţirea cu 3 avem cel mult două numere dintre cele alese, deci avem cel puţin un număr care la această împărţire dă restul 0, un număr care dă restul 1 şi un număr care dă restul 2; suma acestor numere este divizibilă cu 3 .... **3p**

Din cele de mai sus reiese că o mulţime interesantă nu poate avea cinci sau mai multe elemente, deoarece în acest caz găsim trei numere cu suma divizibilă cu 3, iar suma lor este mai mare decât 3. O mulţime interesantă de patru numere este 7, 13, 17, 23 .... **3p**