OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE - ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VII-a 9.03.2019

Problema 1. (7 puncte) Arătați că numărul $a=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+...+\sqrt{2^{100}}}{3\sqrt{2}+6}$ este natural.

Soluție.

$a=\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2^3}+4+...2^{49}\sqrt{2}+2^{50}}{3(\sqrt{2}+2)}$ ....**(2p)**

$a=\dfrac{(\sqrt{2}+2)(1+2+2^2+...+2^{49})}{3(\sqrt{2}+2)}=\dfrac{1+2+2^2+...+2^{49}}{3}$ ....**(2p)**

$a=\dfrac{(1+2)+(2^2+2^3)+...+(2^{48}+2^{49})}{3}=\dfrac{3+2^2\cdot 3+...+2^{48}\cdot 3}{3}=1+2^2+...+2^{48}$ care este natural.........**(3p)**

Problema 2. (7 puncte)

Raportul dintre produsul și suma a două numere naturale este $\dfrac{36}{13}$, iar raportul dintre media geometrică și media aritmetică a acelorași numere este $\dfrac{12}{13}$. Determinați cele două numere.

Soluție.

$\dfrac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{12}{13}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}=\dfrac{6}{13}$ **(1)**...**(1p)**

$\dfrac{a\cdot b}{a+b}=\dfrac{36}{13}$, iar din **(1)** rezultă că $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab}=\dfrac{6}{36}$ ....**(2p)**

Rezultă apoi $\sqrt{ab}=6$, de unde $a\cdot b=36$ ....**(2p)**

Înlocuind în **(1)** se obține $a+b=13$, apoi, cum *a și b* sunt naturale, $a=4, b=9$, sau invers...........**(2p)**

Problema 3.(7 puncte)

În trapezul dreptunghic *ABCD*, $AB \parallel CD$, se știe că $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90°, m(\sphericalangle B)=45°$, $AD=8\ cm$, iar $[AC]\equiv[BC]$.

a) Demonstrați că triunghiul *ACB* este dreptunghic.

b) Calculați aria trapezului *ABCD.*

Soluție.

Desen corect..**(1p)**

a) ΔACB - isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle CAB)=m(\sphericalangle ABC)=45° \Rightarrow m(\sphericalangle ACB)=90°$...................................**(2p)**

b) Fie $CE\perp AB, E\in(AB)$. Atunci $CE=AD=8$ cm. ....**(1p)**

ΔACB este dreptunghic isoscel $\Rightarrow[CE]$ este înălțime, mediană, $\Rightarrow AB=2CE=16$ cm, iar $DC=8$ cm......**(2p)**

$A_{ABCD}=96$ cm^2..**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

În triunghiul echilateral *ABC*, punctul *D* este mijlocul laturii (*BC*). Fie *E* simetricul punctului *D* față de *AC*, iar *F* simetricul punctului *E* față de *BC*. Demonstrați că *ADFE* este romb.

Soluție.

Desen corect..**(1p)**

$m(\sphericalangle ACE)=60°$, $m(\sphericalangle ECF)=120° \Rightarrow$A,C F coliniare...**(1p)**

Fie $DE\cap AC=\{M\}$. În ΔADE, $[AM]$ este înălțime, mediană $\Rightarrow\Delta ADE$ este isoscel $\Rightarrow AD=AE$ ....**(1p)**

$m(\sphericalangle DAE)=60°\Rightarrow\Delta ADE$ este echilateral $\Rightarrow AD=AE=DE$ ....**(1p)**

Demonstrarea faptului că ΔDEF este echilateral $\Rightarrow DE=EF=DF$ ....**(2p)**

ADFE romb..**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!