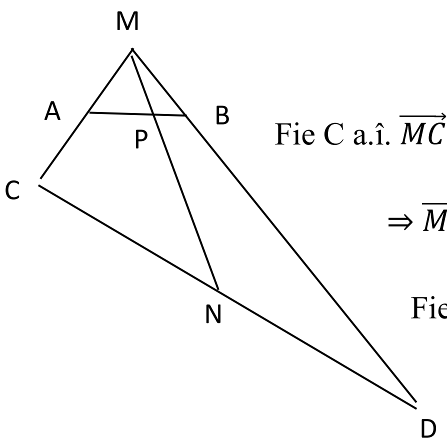
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A IX-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Se dau punctele fixe A,B și punctul M exterior dreptei AB. Să se arate că rezultanta vectorilor 2 $\overrightarrow{MA}$ și 5$\overrightarrow{MB}$ trece printr-un punct fix .

Soluție:



Fie C a.î. $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA}$ și D a.î. $\overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MB}$, N= mijlocul lui $[CD]$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2} = \frac{2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}}{2}$.(1)

Fie $MN \cap AB = \{P\}$ și $k \in R^*$ a.î. $\frac{AP}{PB} = k$. Atunci

$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{MB}$. (2)

Dar $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}$ sunt vectori coliniari, deci $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MP}$ (3)

Din (1), (2) și (3) se obține $k = \frac{5}{2}$. Atunci $P \in (AB)$ a.î. $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{2}$ este punct fix,$(\forall)M$

Barem:

Desen 1p

Din teorema medianei în $\Delta\, MCD$ deducem relația $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2} = \frac{2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}}{2}$ 2p

Fie $MN \cap AB = \{P\}$.Atunci $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{MB}$, unde $k \in R^*$ a.î. $\frac{AP}{PB} = k$.....1p

Vectorii $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}$ sunt coliniari,deci $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MP}$ 1p

Se obține $k = \frac{5}{2}$ deci $P \in (AB)$ a.î. $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{2}$ este punct fix,$(\forall)M$ 2p

2. Numerele reale strict pozitive verifică relațiile: $a = mx, b = ny, c = pz$. Arătați că dacă tripletele a, b, c și x, y, z sunt progresii geometrice, iar tripletul m, n, p este progresie aritmetică, atunci $m = n = p$.

Soluție:

a, b, c în pr. geometrică $\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow n^2y^2 = mx \cdot pz = xz \cdot mp$. Dar $y^2 = xz > 0$ pt. că și x, y, z sunt în pr. geometrică, deci $n^2 = mp$. Deoarece m, n, p sunt în pr. aritmetică avem

$n = \frac{m+p}{2}$ și atunci $\left(\frac{m+p}{2}\right)^2 = mp$ de unde se obține $(m-p)^2 = 0$ deci $m = p$ și din

$n = \frac{m+p}{2} \Rightarrow n = m.$

Barem:

Din a, b, c în progresie geom.$\Rightarrow n^2y^2 = xz \cdot mp$ 2p

Deoarece $y^2 = xz > 0$ se deduce că $n^2 = mp$ 2p

m, n, p sunt în pr. aritmetică$\Rightarrow \left(\frac{m+p}{2}\right)^2 = mp$, de unde $m = p$ 2p

din $n = \frac{m+p}{2} \Rightarrow n = m$..1p

3. Arătați că,dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi,atunci:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le 2$$

Soluție:

Notăm $\begin{cases} b+c = x \\ c+a = y \\ a+b = z \end{cases} \Rightarrow 2a+2b+2c = x+y+z \Rightarrow a = \frac{x+y+z}{2} - (b+c) = \frac{x+y+z}{2} - x =$ $\frac{y+z-x}{2}$ și analog $b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$. Dacă E este expresia din enunț, atunci $E = \frac{y+z-x}{2x} +$ $\frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) - \frac{3}{2} \ge 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.
Egalitatea are loc d.d. $x = y = z$ adică $a = b = c$.

Pe de altă parte, din ipoteză deducem că $b + c > a$ de unde prin adunare cu $b + c$ vom avea $2(b+c) > 2p$ deci $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{p}$ și atunci în mod evident și $\frac{b}{a+c} < \frac{b}{p}, \frac{c}{a+b} < \frac{c}{p}$ de unde prin sumare se obține $E < \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a+b+c}{p} = 2.$

Barem:

Notăm $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases}$ 1p

Atunci $a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$ 1p

Dacă E este expresia din enunț, $E=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-\frac{3}{2}\geq 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 2p

Din ipoteză $b+c>a$, de unde $2(b+c)>2p$ 1p

Avem atunci $\frac{a}{b+c}<\frac{a}{p}$ și analoagele 1p

$E<\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}=\frac{a+b+c}{p}=2$ 1p

4. Arătați că pentru orice număr natural nenul, numărul $2^{2n-1}-(-2)^{n-1}-1$ se divide cu 9.

Soluție:

Demonstrăm prin inducție :

$P(1): 2^{2-1}-(-2)^0-1=0 \vdots 9$

Presupunem că $2^{2k-1}-(-2)^{k-1}-1=9p$, unde $p\in N^*$. Atunci $2^{2k+1}-(-2)^k-1=2^{2k+1}-(-2)\cdot(-2)^{k-1}-1$ și înlocuim pe $(-2)^{k-1}$ din relația anterioară. Obținem $2^{2k+1}-(-2)^k-1=2^{2k+1}-(-2)\cdot\left(2^{2k-1}-1-9p\right)-1=2^{2k+1}+2^{2k}-3-2\cdot 9p=3\cdot\left(2^{2k}-1\right)-2\cdot 9p \vdots 9$ pentru că $2^{2k}-1=4^k-1 \vdots 3$.

Barem:

Inducție matematică

$P(1): 2^{2-1}-(-2)^0-1=0 \vdots 9$...1p

Presupunem că $2^{2k-1}-(-2)^{k-1}-1=9p$, unde $p\in N^*$ 1p

Demonstrăm că propoziția „$P(k)\to P(k+1)$” este adevărată 5p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A X-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1). Se dau numerele: $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}},\ y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a) Sa se determine $a \in \boldsymbol{Q}$ astfel incat $x = a + \sqrt{2}$.
b) Sa se arate ca $x + y \in \boldsymbol{N}$.

Solutie:

a) Din $x^3 = \left(a+\sqrt{2}\right)^3$ obtinem: $7 + 5\sqrt{2} = a^3 + 6a + (3a^2+2)\sqrt{2}$ 1p
Cum $a \in \boldsymbol{Q}$ => $a^3 + 6a = 7\ \ si\ \ (3a^2+2) = 5$ 1p
Deducem ca: $a = 1$..1p
b) Notam $x + y = b$.
Din $(x+y)^3 = b^3$ obtinem ecuatia: $b^3 + 3b - 14 = 0$..2p
Deducem ca: $b = 2,\ deci\ \ x + y = 2 \in \boldsymbol{N}$..2p

2). Fie $z_1,z_2,z_3 \in C^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.

Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{z_1}{z_2+z_3}$.

Soluție:

Fie $\frac{z_1}{z_2+z_3} = a + ib, a,b \in R$. .... 1 p.

Egalitatea $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3|$ se scrie:

$\left|(z_2+z_3)\left(\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right)\right| = |z_2+z_3| \Leftrightarrow |z_2+z_3| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right| = |z_2+z_3|$ .... 2 p.

și cum $|z_2 + z_3| \neq 0$, rezultă $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right| = 1 \Leftrightarrow |a+1+bi| = 1$ de unde

$(a+1)^2 + b^2 = 1.$ (1)

Avem $|z_2+z_3| = |z_1| \Leftrightarrow \left|\frac{z_2+z_3}{z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow |a+bi| = 1$, adică $a^2 + b^2 = 1.$ (2)

Din (1) rezultă $b^2 = 1 - (a+1)^2$ .... 2p.

și înlocuind în (2) obtinem $a^2 + 1 - (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$, deci $a =- \frac{1}{2}$ iar $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avem două solutii: $\frac{z_1}{z_2+z_3} =- \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{z_1}{z_2+z_3} =- \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$... 2 p.

3). Se considera inegalitatea: $\log_{\frac{a}{a+1}}(2 + x^2) > 1,\ a \in \boldsymbol{R}$.

a) Rezolvati inecuatia care se obtine pentru $a =- 3$.
b) Determinati $a \in \boldsymbol{R}$ pentru care inegalitatea data este adevarata pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$.

Solutie:

a. $\log_{\frac{3}{2}}(2 + x^2) > 1 \Leftrightarrow 2 + \mathrm{x}^2 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 >- \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.....................................2p
b. Din conditiile de existenta avem
$\frac{a}{a+1} > 0,\ \frac{a}{a+1} \neq 1 \Rightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$...1p
(1) Daca $\frac{a}{a+1} \in (0,1)$, ar trebui sa avem $2 + x^2 < \frac{a}{a+1},\ \forall x \in \mathbf{R}$, ceea ce este fals......1p
(2) Daca $\frac{a}{a+1} > 1$, adica $a \in (-\infty, -1)$, avem $2 + x^2 > \frac{a}{a+1},\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{-\mathrm{a}-2}{\mathrm{a}+1} \leq 0$...2p
In final $a \in (-\infty, -2)$..1p

4). Sa se rezolve ecuatia: $(\log_5 x) \cdot \log_4 (27 - x) = 1$

Solutie:

Fie $x \in R$ o solutie. Cum $\log_4 (27 - x)$ si $\log_5 x$, au acelasi semn rezulta ca $x \in (1,26)$ si ambele expresii sunt pozitive. Notam $\log_5 x = t > 0$. Atunci $\log_4 (27 - x) = \frac{1}{t}$. Cum

$x = 5^t\, si\ 27 - x = 4^{\frac{1}{t}}$ obtinem $5^t + 4^{\frac{1}{t}} = 27$...1p

Fie $f{:}(0,\infty) \to R,\ f(t) = 5^t + 4^{\frac{1}{t}}$. Vom arata ca f este strict crescatoare pe $[\sqrt{\log_5 4}, \infty)$ si strict descrescatoare pe $(0, \sqrt{\log_5 4}]$.

Fie $t_1, t_2, \in [\sqrt{\log_5 4}, \infty)\ cu\ t_1 < t_2$.

Din $t_1 t_2 > \log_5 4 \Rightarrow \frac{1}{t_2} < t_1 \log_4 5 \Rightarrow \frac{1}{t_2} < \log_4 5^{t_1} \Rightarrow 4^{\frac{1}{t_2}} < 5^{t_1}$, (1).

Din $t_1 t_2 > \log_5 4 \Rightarrow 4^{\frac{1}{t_1 t_2}} < 5 \Rightarrow 4^{\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}} < 5^{t_2 - t_1} \Rightarrow 0 < 4^{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}} - 1 < 5^{t_2 - t_1} - 1$, (2).

Din (1) si (2), prin inmultire obtinem:

$$4^{\frac{1}{t_2}}\left(4^{\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}}-1\right) < 5^{t_1}(5^{t_2-t_1}-1) \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{t_1}} - 4^{\frac{1}{t_2}} < 5^{t_2} - 5^{t_1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5^{t_1} + 4^{\frac{1}{t_1}} < 5^{t_2} + 4^{\frac{1}{t_2}} \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{t}_1) < f(\mathrm{t}_2)$...2p

Analog pentru $(0,\sqrt{\log_5 4}]$. 2p

Cum $f(2) = 27$, $f(\log_5 2) = 27,$ din injectivitatea lui f pe cele doua intervale rezulta ca ecuatia $f(t) = 27$ are exact doua solutii: $t_1 = 2\ si\ t_2 = \log_5 2$, deci ecuatia data are exact doua solutii: $x_1 = 25\ si\ x_2 = 2$. 2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A XI-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\Re)$ cu $det(A) = Tr(A) = 1$. Să se arate că are loc relația $\sum_{k=1}^{n} det(A^2 + kI_2) = \frac{n(n^2+2)}{3}$, unde $n \in N, n \geq 2$.

Solutie:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Re)$. Din ipoteză $Tr(A) = a + d = 1 \Rightarrow d = 1 - a$ și $det(A) = ad - bc = 1 \Rightarrow c = \frac{a(1-a)-1}{b}, b \neq 0$. Din teorema Cayley-Hamilton obținem că $A^2 = A - I_2$ deci $A^2 + kI_2 = \begin{pmatrix} a+k-1 & b \\ \frac{a-a^2-1}{b} & k-a \end{pmatrix}$ de unde avem că $det(A^2 + kI_2) = k^2 - k + 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 1) = \sum k^2 - \sum k + \sum 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(2n^2+4)}{6} = \frac{n(n^2+2)}{3}$.

Barem:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Re)$ Din $Tr(A) = det(A)$=1 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2-1}{b} & 1-a \end{pmatrix}, b \neq 0$ 1p

Din t. Hamilton-Cayley se obține că $A^2 + kI_2 = \begin{pmatrix} a+k-1 & b \\ \frac{a-a^2-1}{b} & k-a \end{pmatrix}$ 2p

Atunci $det(A^2 + kI_2) = k^2 - k + 1$..1p

$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 1) = \sum \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(2n^2+4)}{6} = \frac{n(n^2+2)}{3}$...........................3p

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\Re)$ cu $A^2 = A^3$ și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Solutie:

Din $A + B = I_n \Rightarrow AB = A - A^2$ de unde $(AB)^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4 = O_n$ pentru că $A^2 = A^3, A^3 = A^4$ și adunând relațiile avem $A^2 + A^4 = 2A^3$. Atunci

$I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB) \cdot (I_n + AB)$, deci $(I_n + AB)^{-1} = I_n - AB$.

Altfel: observând că $I_n + AB = I_n + A - A^2$ și folosind relația (care se demonstrează ușor) $(I_n + A - A^2) \cdot (I_n - A + A^2) = I_n$ concluzia este demonstrată.

Barem:

Se arată că din cele 2 relații din ipoteză rezultă că $(AB)^2 = O_n$ 3p

Atunci $I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB) \cdot (I_n + AB)$ 3p

Finalizare: $(I_n + AB)^{-1} = I_n - AB$ 1p

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n+1}, n \geq 1$
a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent;
b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$.

Solutie:

a) Arătăm prin inducție că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Presupunem că $a_n \leq a_{n-1}$ Atunci $a_{n+1} - a_n = \frac{1+a_n^2}{n+1} - \frac{1+a_{n-1}^2}{n} = \frac{n\cdot\left(a_n^2 - a_{n-1}^2\right) - a_n^2 - 1}{n\cdot(n+1)} \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ adică șirul este descrescător și în plus $a_n \leq a_1 = 1$ deci $a_n \in (0,1]$ și fiind mărginit și monoton șirul este convergent.

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \geq 0$ și trecem la limită în relația de recurență.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + a_n^2\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} l = (1 + l^2) \cdot 0$ de unde $a_n \to 0$

b) Folosim teorema Stolz-Cesaro: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln\frac{n+1}{n}}{(n+1)a_{n+1}} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+a_n^2} = 1$.

Barem:

a) Se arată prin inducție că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător 2p

Se arată că $a_n \in (0,1]$..1p

Din relația de recurență rezultă $a_n \to 0$ 1p

b) Din TCS avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{a_{n+1}}$ 1p

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln\frac{n+1}{n}}{(n+1)a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+a_n^2} = 1$ 2p

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\cos 2x\ldots\cos nx)^{\frac{1}{n^3 sin^2 x}}\right)$

Solutie:

Fie $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx-1}{n^3\cdot(\sin x)^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln(\cos x\cos 2x\ldots\cos nx)}-1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot x^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\cos kx=\frac{1}{n^3}\cdot$ $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{2}\right)=-\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{12n^2}$ De aici rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{12n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

Barem:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx-1}{(\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln(\cos x\cos 2x\ldots\cos nx)}-1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot x^2}$ 2p

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos kx}{x^2}=-\frac{k^2}{2}$ 2p

L$=\frac{1}{n^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\cos kx=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{2}\right)=-\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{12n^2}$ 2p

Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{12n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A XII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Fie G un grup și $a,b\in G$ astfel încât $a^3=b^4=e$ și $ba=ab^3$. Demonstrați că
   i) $b^2a=ab^2$
   ii) $b^3a=ab$
   iii) $b^{-1}a^{-1}b^{-1}=a^2$

Soluție:

i) $ba=ab^3 \Leftrightarrow b^2a=bab^3=ab^6=ab^2$ (2 pct)

ii) $b^2a=ab^2 \Leftrightarrow b^3a=bab^2=ab^5=ab$ (2 pct)

iii) $b^{-1}a^{-1}b^{-1}=a^2 \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1}=ba^2 \Leftrightarrow b^{-1}=aba^2 \Leftrightarrow e=baba^2 \Leftrightarrow e=ab^4a^2 \Leftrightarrow e=a^3$ (3 pct)

2. Se consideră mulțimile $M=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z},\ m,n\ impare\right\}$ și $G=M\times\mathbb{Z}$. Pe mulțimea G se definește legea de compoziție $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1\cdot x_2,y_1+y_2)$, $\forall x_1,x_2\in M$ și $\forall y_1,y_2\in Z$.
   i) Calculați $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,2018)$
   ii) Demonstrați că $(G,*)$ este un grup abelian
   iii) Arătați că funcția $f:G\to\mathbb{Q}^*$, $f(x,y)=x\cdot 2018^y$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$

Soluție:

i) $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,2018)=(1,1+2+\ldots+2018)=(1,1009\cdot 2019)$ (1 pct)

ii) Se verifică axiomele grupului
   Partea stabilă (1 pct)
   Asociativitatea și comutativitatea (1 pct)
   Elementul neutru $e=(1,0)\in G$ (0,5 pct)
   Elemente simetrizabile $(x',y')=(x^{-1},-y)\in G$ (0,5 pct)

iii) Arată că f este un morfism de grupuri (1 pct)
   Arată că f este bijectivă (2 pct)

3. Să se determine funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu $f(1)=0$ și care admite o primitivă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(xy)+xy=xy\left(f(x)+f(y)\right)$ oricare ar fi $x,y\in(0,\infty)$.

Soluție:

Fie $y=1$. Atunci $F(x)+x=x\cdot f(x)$. (1 pct)

Deduce relația $\frac{x\cdot f(x)-F(x)}{x^2}=\frac{1}{x}$ (1 pct)

Adică $\left(\frac{F(x)}{x}\right)'=\frac{1}{x}$ (1 pct)

Deci $\frac{F(x)}{x}=\ln x+C$ (1 pct)

$F(x)=x\ln x+Cx$ (1 pct)

$f(x)=\ln x+1+C$ și cum $f(1)=0$ obține $C=-1$ (1 pct)

De unde $f(x)=\ln x$. (1 pct)

4. Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$.

Soluție:

Face schimbarea de variabilă $x=-t$ (2 pct)

Obține $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{t^2e^t}{e^t+1}dt$ (2 pct)

$2I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{t^2e^t}{e^t+1}dt=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx$ (2 pct)

$I=\frac{1}{3}$ (1 pct)