



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală – Constanța 17.02.2019

### Clasa a XII-a

Filiera teoretică : Profilul Umanist – toate specializările

#### SUBIECTUL 1

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  și  $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ ,  $f(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 4I_3$ .

Să se calculeze  $f(A)$ .

#### SUBIECTUL 2

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ .

a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_2$ .

b) Să se demonstreze că  $A^n = n \cdot A + (1-n) \cdot I_2$ .

#### SUBIECTUL 3

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

a) Calculați  $A^2 + A - B$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .

b) Determinați matricea  $X$  cu proprietatea  $2 \cdot (B - A) + X = 3 \cdot A^2$ .

c) Calculați  $2015A^{2015} + 2014A^{2014} + \dots + 2A^2 + A$ , unde  $A^{n+1} = A^n \cdot A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

#### SUBIECTUL 4

Fie matricea  $B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x^2-4 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că:

a)  $(B(x))^2 = 2x \cdot B(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $(B(x))^2 + (B(-x))^2 = 4x^2 \cdot I_2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $(B(-n))^2 + \dots + (B(-1))^2 + (B(0))^2 + (B(1))^2 + \dots + (B(n))^2 = \frac{2n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} \cdot I_2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

#### Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu