



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța 17.02.2019

Clasa a XII-a

Filiera tehnologică: Profilul Tehnic – toate specializările,
Profilul Servicii: - specializarea Resurse Naturale și Protecția Mediului

SUBIECTUL 1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 3 \cdot (x - 2) \cdot (y - 2) + k$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $x * x * x * x = \frac{7}{3}$.

SUBIECTUL 2

Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_2(\mathbb{R}) / A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = A(x + k)$, $k \in \mathbb{R}$

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $\forall A(x), A(y) \in G$.

b) Arătați că (G, \cdot) este grup.

c) Determinați $k \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, \cdot) .

SUBIECTUL 3

Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2018 \cdot (x-1)}{x^2-1} - m; & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + \ln x - 1; & x \geq 1 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$

a) Să se determine numărul real m astfel încât funcția f să admită primitive pe $[0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\int \frac{f(x)}{x} dx$, $x \in [1, \infty)$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(1, \infty)$.

SUBIECTUL 4

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

a) Arătați că funcția f verifică relația $(e^{-x} \cdot f(x))' = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați primitiva G a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x) - f'(x)}{e^x}$ care satisface condiția $G(0) = 2019$.

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.