



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța 17.02.2019

### Clasa a XII-a

Filiera teoretică: Profilul real – specializarea științele naturii

#### SUBIECTUL 1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2 - 5(x - 2)(y - 2)$ .

a) Determinați  $n \in \mathbf{N}$ , astfel încât  $(n * n) * n = n$ .

b) Arătați că, dacă  $a * a = b$  și  $b * b = a$ , atunci  $a = b = 2$  sau  $a = b = \frac{9}{5}$ .

#### SUBIECTUL 2

Fie  $G = (0, 1)$  și legea de compoziție  $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ ,  $\forall x, y \in G$ , astfel încât  $(G, *)$  este grup abelian.

a) Arătați că funcția  $f : G \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$  este un izomorfism de la grupul  $(G, *)$  la grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive  $((0, \infty), \cdot)$ .

b) Calculați  $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2019}$ .

#### SUBIECTUL 3

Fie  $a, b \in \mathbf{R}$  și funcția  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ 1 + \ln^2 x, & x \geq 1 \end{cases}$ .

a) Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel încât funcția  $F$  să fie o primitivă a unei funcții  $f$ .

b) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{1}{x \cdot F(x)} dx$ .

#### SUBIECTUL 4

Calculați: a)  $\int \frac{1}{x(x^{2019} + 1)} dx$ ,  $x > 0$ ; b)  $\int \sqrt{\frac{x^3}{1 + x^5}} dx$ ,  $x > 0$ ; c)  $\int_{-1}^2 \frac{x + [x]}{|x| + [x] + 2} dx$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .

#### Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.