



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – Constanța 17.02.2019

Clasa a IX-a

Filiera tehnologică: Profilul Tehnic – toate specializările,
Profilul Servicii: – specializarea Resurse Naturale și Protecția Mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE:

SUBIECTUL 1

Fie $a_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{130}{27}$.

a) $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică $\Leftrightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, $\forall n \geq 2$ 1p

Înlocuire și verificarea relației2p

b) Formula sumei $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$ 1p

Calcul $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ 1p

Înlocuire în formula sumei și calcul corect1p

Finalizare $n = 4$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Rezolvați ecuația $\left\lfloor \frac{6x+1}{5} \right\rfloor = \frac{2x+1}{3}$, știind că se notează cu $[a]$ partea întreagă a numărului a .

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care numărul $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2019}$ este întreg.

a) Notez $\frac{6x+1}{5} = k$, $k \in \mathbb{Z}$ și din definiția părții întregi, $k \leq \frac{6x+1}{5} < k+1$ 1p

$k = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 2x+1 = 3k \Rightarrow x = \frac{3k-1}{2}$ 1p

$k \in \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right) \cap \mathbb{Z} = \{1\} \Rightarrow x = 1$ 1p

b) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{18+8\sqrt{2}} = 4+\sqrt{2}$; $\sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}$ și suma egală cu 92p

$\frac{9}{x-2019} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2019 \in \{-9; -3; -1; 3; 9\}$ 1p

Finalizare $x \in \{2010; 2016; 2018; 2020; 2022; 2028\}$ 1p

SUBIECTUL 3

Fie $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+2)}$

a) Calculați valoarea sumei S_n .

b) Folosind metoda inducției matematice, demonstrați egalitatea obținută, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

a) $\frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$, unde $1 \leq k \leq n$ 1p



Înlocuind pe k cu valori de la 1 la n și calcul direct, obținem $\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$ 2p

b) Pentru $n=1$, $\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 3} \Rightarrow P(1) \quad (A)$, demonstrez că $P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad (A)$, $k \geq 1$ 1p

$$P(k) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

$$P(k+1) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k+1) \cdot (3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$
1p

Atunci $P(k+1) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} + \frac{1}{(3k+1) \cdot (3k+4)} =$

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1) \cdot (3k+4)} = \frac{(3k+1) \cdot (k+1)}{(3k+1) \cdot (3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} \Rightarrow P(n) \quad (A), \forall n \geq 1$$
2p

SUBIECTUL 4

Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele M , respectiv N , astfel încât $\overrightarrow{2BM} = \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{3DN} = \overrightarrow{DC}$.

Notăm $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ și $AM \cap BN = \{P\}$.

a) Exprimați vectorii \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{BN} , \overrightarrow{AN} , \overrightarrow{DM} cu ajutorul vectorilor \vec{a} , respectiv \vec{b} .

b) Dacă $\overrightarrow{CM} = 2\vec{b}$, demonstrați că punctele A , N , K sunt coliniare.

a) Folosind relația lui Chasles: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} - \frac{2\vec{a}}{3}$;

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{b} + \frac{\vec{a}}{3}; \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$$
4p

b) $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CK} = \frac{2\vec{a}}{3} + 2\vec{b} = 2\left(\frac{\vec{a}}{3} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{AN}$ 2p

Cum $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow$ punctele A , N , K sunt coliniare1p

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu