



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

**Clasa a XII-a**

Filiera teoretică: Profilul real – specializarea științele naturii

**Barem de corectare și notare**

## SUBIECTUL 1

a)  $n * n = 2 - 5(n-2)^2, (n * n) * n = 2 + 25(n-2)^3 \dots\dots\dots 2p$

$$2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)[25(n-2)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow n \in \left\{2, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right\}; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2 \dots\dots\dots 2p$$

b)  $a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2; b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2 \dots\dots\dots 1p$

$$\text{Deci } a - 2 = -125(a-2)^4 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = b = 2 \text{ sau } a - 2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow a = b = \frac{9}{5} \dots\dots\dots 2p$$

## SUBIECTUL 2

a)  $f$  injectivă și surjectivă  $\Rightarrow f$  bijectivă (1)  $\dots\dots\dots 2p$

$$f(x * y) = \frac{xy + (x-1)(y-1)}{xy} - 1 = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G \Rightarrow$$

$f$  morfism (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow f$  izomorfism  $\dots\dots\dots 2p$

b) Se demonstrează prin inducție matematică relația:

$$f(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n), \forall x_i \in G, i = \overline{1, n}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

$$f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2019}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2019}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 = 2018! \dots\dots\dots 1p$$

$$f \text{ bijectivă} \Rightarrow f \text{ inversabilă și } f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2019} = f^{-1}(2018!) = \frac{1}{1+2018!} \dots\dots\dots 1p$$

## SUBIECTUL 3

a) Funcția  $F$  trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Din continuitatea în  $x = 1 \Rightarrow a + b = 1 \dots\dots\dots 2p$

Din derivabilitatea în  $x = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1 \dots\dots\dots 2p$

b)  $t = \ln x \Rightarrow \int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 3p$

## SUBIECTUL 4

a)  $\int \frac{1}{x(x^{2019} + 1)} dx = \int \frac{1+x^{2019} - x^{2019}}{x(x^{2019} + 1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x^{2018}}{x^{2019} + 1} dx = \ln x - \frac{1}{2019} \ln(x^{2019} + 1) + C \dots\dots 2p$

b)  $\int \sqrt{\frac{x^3}{1+x^5}} dx = \int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1+x^5}} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2}} dx; t = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{2}{5} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\frac{x^3}{1+x^5}} dx = \frac{2}{5} \ln(\sqrt{x^5} + \sqrt{1+x^5}) + C \dots\dots\dots 2p$$

c)

$$\int_{-1}^2 \frac{x + [x]}{|x| + [x] + 2} dx = \int_{-1}^0 \frac{x-1}{-x+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx + \int_1^2 \frac{x+1}{x+3} dx = -\int_{-1}^0 dx + \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x+3}\right) dx =$$

$$= -x \Big|_{-1}^0 + [x - 2 \ln(x+2)] \Big|_0^1 + [x - 2 \ln(x+3)] \Big|_1^2 = -1 + 1 - 2 \ln \frac{3}{2} + 1 - 2 \ln \frac{5}{4} = 1 - 2 \ln \frac{15}{8} \dots\dots\dots 3p$$