



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a XI-a

Filiera teoretică: Profilul real – specializarea științele naturii

Barem de corectare și notare

1.

a) Verificarea prin calcul a relației $A(x) \cdot A(y) = A((x+1)(y+1) - 1)$ **3p**

$$b) A\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{1}{3}\right) A\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot A\left(\frac{1}{n}\right) = A\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{n}+1\right) - 1\right) = A\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} - 1\right) = A\left(\frac{n+1}{2}\right) \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

Verificare prin inducție**1p**

c) Prin înlocuirea și înmulțirea repetată conform proprietăților de comutativitate și asociativitate se obține

$$\text{în final } A\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{1}{3}\right) A\left(\frac{1}{4}\right) \dots A\left(\frac{1}{2019}\right) = A(1009) \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

$$2. \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ c & \frac{1}{2} & d \\ e & f & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \text{ și } a+b=c+d=e+f=c+e=a+f=b+d=\frac{1}{2} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

$$\text{Se obține } a=d=e \text{ și } b=c=f \text{ de unde } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ b & \frac{1}{2} & a \\ a & b & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \text{ și } a+b=\frac{1}{2} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ b & \frac{1}{2} & a \\ a & b & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & \frac{1}{2} & a \\ a & b & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + a^2 + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - ab = a^2 - ab + b^2 \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

$$a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0 \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

3. a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + \dots + 2019^x}{2018} \right)^{\frac{2018}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 1 + 3^x - 1 + \dots + 2019^x - 1}{2018} \right)^{\frac{2018}{x}} = \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 + 3^x - 1 + \dots + 2019^x - 1}{x}} = e^{(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 2019)} = 2019! \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

b)

$$\frac{ax}{\sin^2 x} - 1 < \left[\frac{ax}{\sin^2 x} \right] \leq \frac{ax}{\sin^2 x} \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Înmulțim cu } x > 0 \text{ și obținem } \frac{ax^2}{\sin^2 x} - x < x \left[\frac{ax}{\sin^2 x} \right] \leq \frac{ax^2}{\sin^2 x}$$

și cum $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax^2}{\sin^2 x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{\sin^2 x} = a$ rezultă conform criteriului cleștelui că $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{ax}{\sin^2 x} \right] =$

a **1p**

Analog $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{ax}{\sin^2 x} \right] = a$. Finalizare $a = 3$ **1p**

4.

Asimptote verticale: $\lim_{x \rightarrow 0} |x - 1|e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow 0} |x - 1|e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Așadar $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta**2p**

Asimptote orizontale :

$\lim_{x \rightarrow \infty} |x - 1|e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1|e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, așadar nu avem asimptote orizontale.**1p**

Asimptote oblice:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x-1|e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \text{1p}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[|x - 1|e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x - 1)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right] = 1 - e^0 = 0 \end{aligned}$$

Așadar dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$ **1p**

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = -1 \text{1p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x - 1|e^{\frac{1}{x}} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-x + 1)e^{\frac{1}{x}} + x \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \right] = -1 + e^0 = 0.$$

Așadar dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică la $-\infty$ **1p**