



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a X-a

filiera teoretică: profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1.

$$a) \log_{xy} yz + \log_{yz} xy = \log_{xy} yz + \frac{1}{\log_{yz} xy} \geq 2 \quad 2p$$

$$b) \text{ Conform a) avem: } \left. \begin{array}{l} \log_{xy} yz + \log_{yz} xy \geq 2 \\ \log_{xy} xz + \log_{xz} xy \geq 2 \\ \log_{zy} xz + \log_{xz} zy \geq 2 \end{array} \right\} \quad 3p$$

$$\text{Adunând egalitățile obținem: } \log_{xy} xyz^2 + \log_{yz} x^2yz + \log_{xz} xy^2z \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\log_{xy} z + 1 + 2\log_{yz} x + 1 + 2\log_{xz} y \geq 6 \quad 1p$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \frac{3}{2} \quad 1p$$

SUBIECTUL 2

Amplificăm fracțiile cu $\sqrt[3]{2}$ și obținem:

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}} + \frac{2y \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8(2+\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{14\sqrt{5}+18\sqrt{3}}} \quad 1p$$

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}} + \frac{2y \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3}} \quad 2p$$

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2y \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad 1p$$

$$x(\sqrt{3}-1) + y(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}-\sqrt{3} \quad 1p$$

$$\sqrt{3}(x+1) + \sqrt{5}(y-1) - x - y = 0 \quad 1p$$

$$x = -1, y = 1 \quad 1p$$



SUBIECTUL 3

a) $\frac{2z-i}{2+iz} \in A \Leftrightarrow \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |2z-i| \leq |2+iz|$ 2p

Știind că $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \Rightarrow (2z-i)(2\bar{z}+i) \leq (2+iz)(2-i\bar{z})$ 1p

$4|z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} + 1 \leq 4 - 2i\bar{z} + 2iz + |z|^2$ 1p

$\Leftrightarrow |z| \leq 1 \Leftrightarrow z \in A \Leftrightarrow \frac{2z-i}{2+iz} \in A$ 1p

b) $(1+z)^2 = 1+2z+z^2 \Rightarrow 2z = (1+x)^2 - (1+z^2)$ 1p

$\Rightarrow |2z| \leq |1+z|^2 + |1+z^2| \leq 2 \Rightarrow |z| \leq 1$ 1p

SUBIECTUL 4

Notăm $2^x - \frac{1}{2^{x-1}} = t \Rightarrow \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right)^3 = t^3$ 2p

$\Rightarrow 2^{3x} - \frac{1}{2^{3x-3}} = t^3 + 6t \Rightarrow 2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} = t^3 + 6t$ 1p

Ecuția devine $t^3 + 6t - 6t = 1 \Rightarrow t^3 = 1 \Rightarrow t = 1$ singura soluție reală 1p

$\Rightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1$ notăm $2^x = y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -1$

$\Rightarrow x = 1$ 3p