# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
# CLASA A VIII-A
# Vâlcea

## SUBIECTUL 1

Fie $E(x) = 16x^2 - 32x + 25, x \in \boldsymbol{R}$.

**a)** Dacă $m = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \sqrt{3} - 3$, arătați că $E(m) \in \boldsymbol{Z}$;

**b)** Dacă $a \in \boldsymbol{Z}$, scrieţi numărul $E(a)$ ca o sumă de două pătrate;

**c)** Pentru $x \in \boldsymbol{N}$ determinaţi valoarea maximă a expresiei $F(x) = 10 - E(x)$.

## SUBIECTUL 2

**a)** Arătați că pentru oricare numere reale $x, y, z > 0$ este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$ .

**b)** Demonstrați că $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$.

*Gazeta Matematică*

## SUBIECTUL 3

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Fie O și O' centrele fețelor *ABCD*, respectiv *A'B'C'D'*, iar M mijlocul muchiei *BB'*.

**a)** Determinați aria triunghiului *ACD'* dacă ΔOBM are perimetrul egal cu $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}$

**b)** Arătați că $D'M \perp AO$.

**c)** Fie $(ABC) \cap O'M = \{P\}$ și R simetricul lui M față de punctul P. Arătați că B este centrul de greutate al triunghiului *DMR*.

## SUBIECTUL 4

Fie piramida triunghiulară *VABC* cu lungimile muchiilor laterale *VA* = *a*, *VB* = *b* și *VC* = *c*. Fie *E* mijlocul lui [*AB*] și *O* centrul de greutate al bazei *ABC* a piramidei.

**a)** Arătați că $VE < \frac{a+b}{2}$.

**b)** Arătați că $VO < \frac{a+b+c}{3}$.

**c)** Dacă $a = b = c$ și $m\left(\sphericalangle(VB, AC)\right) = 60^\circ$ arătați că $\frac{AB^2 - BC^2}{AC} = a$.

**Notă:** Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.