SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
CLASA A XII-A
Vâlcea

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $G=(-k,k)$, unde $k>0$, se consideră operația „$*$” definită prin $x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Arătați că funcția $f:G\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{k^2-t^2}dt$ este un izomorfism de grupuri de la $(G,*)$ la $(\mathbb{R},+)$.

c) Pentru $k=1$ demonstrați că pentru orice $a\in G$ ecuația $x*x=a$ are o unică soluție $x\in G$.

SUBIECTUL II

Fie $(G,\cdot)$ grup și $x,y\in G$.

a) Arătați că $\left(xyx^{-1}\right)^{2019}=xy^{2019}x^{-1}$.

b) Arătați că dacă există un număr natural nenul n astfel încât $\left(xyx^{-1}\right)^n=e$ atunci $y^n=e$.

c) Arătați că dacă $\left(y^{-1}xy\right)^4=e$ și $xy=yx^2$ atunci $x=e$.

SUBIECTUL III

a) Calculați $\int \dfrac{x\cdot arctgx}{\left(1+x^2\right)^2}dx,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\dfrac{arctg\left(x^2\right)}{1+x^2}dx$.

SUBIECTUL IV

Calculați $\int_2^6 \dfrac{\ln(x-1)}{x^2+2x+2}dx$.

G.M. Nr. 5 / 2018, Prof. Radu Diaconu, Sibiu

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte
Toate subiectele sunt obligatorii