OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
CLASA A XI-A
Vâlcea

SUBIECTUL I:

Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 > 0$ si $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt[4]{1+\frac{a_n^8}{n}}}$.

Să se demonstreze că șirul este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

G.M. Nr 2/2018

SUBIECTUL II:

Se consideră matricele $A, B \in M_n(R)$ $, n \in N^*, n \geq 2$.

a) Demonstrați că $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$

b) Arătați că pentru $A \cdot B = O_n$ este îndeplinită relația: $\det(A^2 + B^2 + A + B + I_n) \geq 0$

SUBIECTUL III:

Se consideră șirul de termen general $a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \ldots \cdot \cos^n nx}{x^2}, n \in N^*$

a) Calculați a_1 și a_2.

b) Calculați $a_n, n \in N^*$

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{a_k} \right)^{\ln n}$.

SUBIECTUL IV:

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.

a) Determinați $A^n, n \in N^*$

b) Arătați că există matricele $B, C \in M_2(Z)$ astfel încât $A = B^3 + C^3$

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte
Toate subiectele sunt obligatorii