OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2019

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I (7p)

Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x) = x^2 - x + 1$

Barem de corectare și notare:

$E(x) = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ **1p**

$E(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ **2p**

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ **1p**

Valoarea minimă se obține pentru $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ **1p**

Deci, valoarea minimă a lui $E(x)$ este $\frac{3}{4}$ **2p**

SUBIECTUL II (7p)

Aflați numerele reale pozitive *x* și *y*, astfel încât $x + 4y + 1 = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{xy}$

Barem de corectare și notare:

Înmulțind cu 2, obținem $2x + 8y + 2 - 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} - 4\sqrt{xy} = 0$ **1p**

$x - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$ **1p**

$4y - 4\sqrt{y} + 1 = \left(2\sqrt{y} - 1\right)^2$ **1p**

$x - 4\sqrt{xy} + 4y = \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)^2$ **1p**

$\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(2\sqrt{y} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)^2 = 0$ **1p**

Dar, $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0;\quad \left(2\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 0;\ \left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2 \geq 0;$

Deci, $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 + \left(2\sqrt{y}-1\right)^2 + \left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2 = 0,\ \left(2\sqrt{y}-1\right)^2 = 0 \text{ și } \left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2 = 0$ **1p**

$\Rightarrow x = 1 \text{ și } y = \frac{1}{4}$ **1p**

SUBIECTUL III (7p)

Aflați dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, știind că acestea sunt invers proporționale cu $0,(2);\ \frac{1}{2}$ și 2, iar lungimea diagonalei paralelipipedului este de $14\sqrt{2}m$.

Barem de corectare și notare:

$a \cdot 0,(2) = b \cdot \frac{1}{2} = c \cdot 2 = p$ **2p**

$a = \frac{9p}{2};\quad b = 2p;\quad c = \frac{p}{2}$ **1p**

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{7p\sqrt{2}}{2}$ **2p**

P = 4 **1p**

$a = 18m,\ b = 8m,\ c = 2m$ **1p**

SUBIECTUL IV (7p)

Fie VABC o piramidă regulată cu baza triunghiul echilateral ABC și M mijlocul laturii BC. Dacă triunghiul BMV este isoscel, determinați măsura unghiului dintre dreapta AV și planul (VBC).

Barem de corectare și notare:

VM = BM = $\frac{a}{2}$ **1p**

VB $= \frac{a\sqrt{2}}{2}$ **1p**

În $\triangle$ VAM, din reciproca teoremei lui Pitagora, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{VA}^2 + \mathrm{VM}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle AVM) = 90° \Rightarrow \mathrm{AV} \perp \mathrm{VM}$ **1p**

$\left.\begin{matrix} BC \perp VM \\ BC \perp AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (VAM) \Rightarrow BC \perp VA$ **2p**

$$\left.\begin{array}{r} AV \perp VM \\ AV \perp BC \\ VM \cap BC = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow AV \perp (VBC)$$ **1p**

$m(\widehat{AV,(VBC)}) = 90°$ **1p**

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro