OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2019

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numărul $A=\overline{a,bc}+\overline{b,ca}+\overline{c,ab}$

a) Aflați numărul A pentru a=3, b=5 și c=7.

b) Dacă a+b=c și $A=\frac{2^5\cdot 2^4:2^7\cdot 5^7:5^5+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\cdot\sqrt{25}+2^0}{10}$ determinați cifrele a, b și c.

Barem de corectare

a) 3,57+5,73+7,35=16,65 1p

b) $A=\frac{2^5\cdot 2^4:2^7\cdot 5^7:5^5+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\cdot\sqrt{25}+2^0}{10}=\frac{2^2\cdot 5^2+2\cdot 5+1}{10}=\frac{111}{10}$ 2p

$\frac{\overline{abc}}{100}+\frac{\overline{bca}}{100}+\frac{\overline{cab}}{100}=\frac{111}{10}$ 1p

$\frac{111(a+b+c)}{100}=\frac{111}{10}\Rightarrow a+b+c=10$ 1p

a+b=c ⇒ 2c=10 ⇒ c=5 ⇒a+b=5 1p

Deci a=0, b=5,c=5
a=1, b=4, c=5
a=2, b=3, c=5 1p
a=3, b=2, c=5
a=4, b=1, c=5
a=5, b=0, c=5

SUBIECTUL II (7p)

Să se afle perechile de numere naturale (p,q) pentru care $\sqrt{pq}-q=2019$.

Barem de corectare

Se verifică că p și q nu pot fi egale cu zero.

$\sqrt{p}\sqrt{q}-\sqrt{q}\sqrt{q}=2019$ 1p

$\sqrt{q}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=1\cdot 3\cdot 673$ 2p

Avem următoarele cazuri:

$\sqrt{q}=1\Rightarrow q=1\Rightarrow\sqrt{p}-1=2019\Rightarrow\sqrt{p}=2020\Rightarrow p=2020^2\Rightarrow(2020^2,1)soluție$ 1p

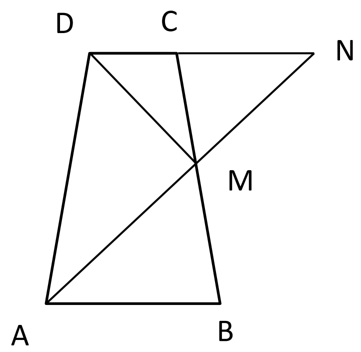
$\sqrt{q}=3\Rightarrow q=9\Rightarrow\sqrt{p}-3=673\Rightarrow\sqrt{p}=676\Rightarrow p=676^2\Rightarrow(676^2,9)soluție$ 1p

$\sqrt{q} = 673 \Rightarrow q = 673^2 \Rightarrow \sqrt{p} - 673 = 3 \Rightarrow \sqrt{p} = 676 \Rightarrow p = 676^2 \Rightarrow (676^2, 673^2)$ *soluție* 1p
$\sqrt{q} = 2019 \Rightarrow q = 2019^2 \Rightarrow \sqrt{p} - 2019 = 1 \Rightarrow \sqrt{p} = 2020 \Rightarrow p = 2020^2 \Rightarrow (2020^2, 2019^2)$
soluție 1p

SUBIECTUL III (7p)

Fie trapezul ABCD în care AB//CD și AD=AB+CD. Bisectoarea unghiului DAB intersectează latura (BC) în M. Arătați că M este mijlocul lui [BC] și $m(\widehat{AMD}) = 90^0$.

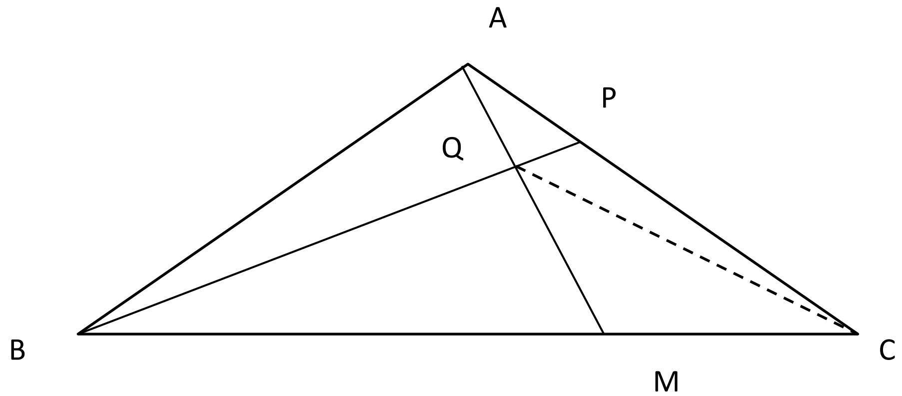
Barem de corectare



Fie N=AM∩CD 1p
$\widehat{BAN} \equiv \widehat{AND}$ $(alterne\ interne)$ 1p
$\widehat{BAN} \equiv \widehat{DAN}$ (ip)
$\Rightarrow \Delta DAN\ isoscel$ 1p
$AD = DC + CN, AD = DN \Rightarrow AB = CN$ 1p
CN//AB
$\Rightarrow ABNC\ paralelogram \Rightarrow$ 1p
$[MC] \equiv [MB]$ $și$
$[AM] \equiv [MN]$ $(diag. se\ înjumătățesc)$ 1p
$\Delta DAN\ isoscel \Rightarrow DM \perp AN$ $(mediana\ este\ și$ $înălțime)$, deci $m(\widehat{AMD}) = 90^0$ 1p

SUBIECTUL IV (7p)

Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 210 cm^2 și punctele M pe latura BC, P pe latura AC astfel încât BM=2MC și CP=2AP. Dacă {Q}=AM∩BP, determinați aria patrulaterului MCPQ.



Ducem QC și notăm $A_{ABQ} = a, A_{BQM} = b, A_{MQC} = c, A_{QCP} = d, A_{AQP} = e$ 1p

$A_{BPC} = \frac{2}{3} A_{ABC} = 140\ cm^2 \Rightarrow b + c + d = 140$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

$A_{AMC} = \frac{1}{3} A_{ABC} = 70\ cm^2 \Rightarrow c + d + e = 70$ 1p

$A_{QBM} = 2A_{QMC} \Rightarrow b = 2c$ 1p

$A_{QPC} = 2A_{QAP} \Rightarrow d = 2e$ 1p

Înlocuind b și d în primele relații obținem 3c+2e=140 și c+3e=70 de unde obținem c=40, e=10 și d=20 1p

Deci $A_{MCPQ} = c + d = 60\ cm^2$ 1p

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*