OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2019

Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numărul $A = 13 + 13^2 + 13^3 + \cdots + 13^{2016}$

a) Determinați ultima cifră a numărului A;
b) Arătați că numărul A se divide cu 14.

Soluție:

a) Suma are 2016 termeni, iar 2016 se împarte exact la 4. În acest sens, vom grupa termenii câte patru.
$A = (13 + 13^2 + 13^3 + 13^4) + (13^5 + 13^6 + 13^7 + 13^8) + \cdots + (13^{2013} + 13^{2014} + 13^{2015} + 13^{2016})$ ....**(1p)**
$A = 13 \cdot (1 + 13 + 13^2 + 13^3) + 13^5 \cdot (1 + 13 + 13^2 + 13^3) + \cdots + 13^{2013} \cdot (1 + 13 + 13^2 + 13^3) = 13 \cdot 2380 + 13^5 \cdot 2380 + \cdots + 13^{2013} \cdot 2380$ ....**(1p)**
$A = 2380 \cdot (13 + 13^5 + \cdots 13^{2013})$ .... **(1p)**
Ultima cifră a lui A este zero .... **(1p)**

b) $A = (13 + 13^2) + (13^3 + 13^4) + \cdots + (13^{2015} + 13^{2016})$ ....**(1p)**
$A = 13 \cdot (1 + 13) + 13^3 \cdot (1 + 13) + \cdots + 13^{2015} \cdot (1 + 13)$ .... **(1p)**
$A = 13 \cdot 14 + 13^3 \cdot 14 + \cdots + 13^{2015} \cdot 14 = 14 \cdot (13 + 13^3 + \cdots + 13^{2015}) \Rightarrow A \vdots 14$ .... **(1p)**

SUBIECTUL II (7p)

Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 33 dau restul egal cu triplul câtului.

Soluție:

Dacă numărul natural "n" împărțit la 33 dă câtul "c" și restul $3 \cdot c$ atunci $n = 33 \cdot c + 3 \cdot c$ .....**(2p)**
unde $0 \leq 3 \cdot c < 33 \Rightarrow 0 \leq c < 11$ ....**(1p)**
Convin valorile $c = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, adică numerele $n = 0, 36, 72, 108, \dots, 360$ ....**(2p)**
Avem pentru suma acestor numere:

$$S = 0 + 36 + 72 + \cdots + 324 + 360$$
$$S = 360 + 324 + \cdots + 36 + 0$$ ....**(1p)**

$2 \cdot S = 360 \cdot 11$, adică $S = 180 \cdot 11 = 1980$ ....**(1p)**

SUBIECTUL III (7p)

Să se arate că numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + 2007$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural nenul.

Soluție:

Dacă x ar fi pătrat perfect, am avea ultima cifră a lui x : $0, 1, 4, 5, 6, 9$. ....**(1p)**
Pentru $n \geq 5 \Rightarrow ultima\ cifră\ a\ lui\ x\ este\ 0 + 7 = 7$, iar x nu este pătrat perfect ....**(2p)**
Dacă $n = 1 \Rightarrow x = 2008,\ iar\ x\ nu\ este\ pătrat\ perfect$ ....**(1p)**
Dacă $n = 2 \Rightarrow x = 2009, iar\ x\ nu\ este\ pătrat\ perfect$ ....**(1p)**
Dacă $n = 3 \Rightarrow x = 2013,\ iar\ x\ nu\ este\ pătrat\ perfect$ ....**(1p)**
Dacă $n = 4 \Rightarrow x = 2031, iar\ x\ nu\ este\ pătrat\ perfect$ ....**(1p)**
Deci, concluzia este demonstrată

SUBIECTUL IV (7p)

Mihai pleacă din Arad spre Sibiu, la ora 8, conducând un autoturism cu viteza medie de $60\ km$ pe oră. Dan pleacă din Arad tot spre Sibiu, pe același drum, la ora 9, pe o motocicletă, conducând cu viteza medie de $90\ km$ pe oră. La ce distanță de Arad îl ajunge Dan pe Mihai?

Soluția I:

1. După câte ore de la plecarea lui Mihai pleacă Dan?
   $9 - 8 = 1$ ....**(1p)**
2. Ce distanță parcurge Mihai într-o oră?
   $60 \cdot 1 = 60\ (km)$ ....**(1p)**
3. Ce distanță recuperează Dan într-o oră?
   $90 - 60 = 30\ (km)$ ....**(1p)**
4. După câte ore Dan îl ajunge pe Mihai?
   $60 : 30 = 2\ (ore)$ ....**(2p)**
5. La ce distanță de Arad îl ajunge Dan pe Mihai?
   $90 \cdot 2 = 180\ (km)$ ....**(2p)**

Soluția II:
Notăm după câte ore Dan îl ajunge pe Mihai cu x. ....**(1p)**
Avem $90 \cdot x = 60 \cdot (x + 1)$, ...**(2p)**
de unde $90 \cdot x = 60 \cdot x + 60 \Rightarrow 30 \cdot x = 60 \Rightarrow x = 2\ ore$. ....**(2p)**
$Distanța\ este\ 90 \cdot 2 = 180\ km$. ....**(2p)**

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro