MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ
Municipiul Curtea de Argeș,
Strada Negru Vodă nr. 131, Județul Argeș, cod 115300
Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;
E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com
Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

MODEL SUBIECTE SIMULARE MARTIE 2019
BACALAUREAT –MAT–INF+ ST. NATURII (subiecte selectate de prof. Gobej Adrian)

Subiectul I –Varianta nr. 1 (enunțuri)

5p	**1.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $4x^2+3x-1\le 0$.
5p	**2.** Să se determine $x\in\mathbf{R}$ știind că numerele $x-2013$, $x-1$, $x+2013$ sunt în progresie geometrică.
5p	**3.** Rezolvați ecuația $10^{2x+1}+10^{x+2}=240, x\in\mathbf{R}$.
5p	**4.** Fie mulțimea A={1, 2, 3, 4, 5}. Alegem la întâmplare o submulțime a mulțimii A. Care este probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă două elemente?
5p	**5.** Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{4}{5}$, să se calculeze $\sin 2x$.
5p	**6.** Să se determine valoarea lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2-m,2)$ și $B(-2,m-2)$ să fie $2\sqrt{2}$.

Subiectul I –Varianta nr. 1 (barem de corectare)

1. Se rezolvă inecuația $4x^2+3x-1\le 0$ și se determină $x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right]$ **(3p)**

de unde se deduc soluțiile întregi $x=-1$ și $x=0$. **(2p)**

2. Știm că a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2=a\cdot c$. **(2p)**

Prin înlocuire se obține: $x^2-2013^2=(x-1)^2$ **(1p)**, iar soluția este: $x=\frac{2013^2+1}{2}$. **(2p)**

3. Notăm $10^x=y$, obținem $10y^2+100y-240=0\Rightarrow y^2+10y-24=0$ **(2p)**

Soluțiile $y_1=2,\ y_2=-12$ **(1p)**

Cum $10^x>0\Rightarrow 10^x=2\Rightarrow x=\lg 2$. **(2p)**

4. Numărul cazurilor favorabile este $2^5=32$ **(2p)**

Numărul cazurilor posibile este $C_5^2=10$ **(2p)**; avem $P=\frac{C_5^2}{2^5}=\frac{5}{16}$. **(1p)**

5. $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{9}{25}\Rightarrow|\cos x|=\frac{3}{5}$. **(2p)**

Din $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x<0\Rightarrow\cos x=-\frac{3}{5}$. **(1p)**

$\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$ **(2p)**

6. Cum $AB=\sqrt{(4-m)^2+(4-m)^2}$, **(2p)**

se obține $(4-m)^2=4$ **(1p)**; soluțiile $m_1=2$ și $m_2=6$. **(2p)**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ
Municipiul Curtea de Argeş,
Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300
Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;
E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com
Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

Subiectul II –Varianta nr. 1 (enunțuri)

1. Se consideră sistemul (S): $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=-1 \end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $(a+2)\cdot(a-1)^2$

5p **b)** Determinați $a\in\mathbf{R}$ astfel încât (S) să nu fie compatibil determinat.

5p **c)** Aflați $a\in\mathbf{R}$ astfel încât soluția unică (x, y, z) a sistemului (S) să formeze o progresie aritmetică de rație $r=-\frac{2}{5}$.

2. Pe $\mathbf{C}$ se definește legea de compoziție $z*u=zu+i(z+u)-1-i$, $\forall z, u\in\mathbf{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $(1-i)*i$.

5p **b)** Să se arate că există $a\in\mathbf{C}$ astfel încât $z*a=a*z=a$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

5p **c)** Ştiind că legea este asociativă, să se calculeze $(2013-i)*(2012-i)*\cdots*(2012+i)*(2013+i)$

Subiectul II –Varianta nr. 1 (barem de corectare)

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$; **(5p)**

b) $\Delta=0\Rightarrow(a+2)(a-1)^2=0\Rightarrow a\in\{-2,1\}$ **(5p)**

c) Pentru $a\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$, folosind regula lui Cramer, **(3p)** avem:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{1}{a-1}$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=0\Rightarrow y=\frac{\Delta y}{\Delta}=0$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)\Rightarrow z=\frac{\Delta z}{\Delta}=-\frac{1}{a-1}$$

Se observă că x,y,z formează o progresie aritmetica cu rația $r=-\frac{1}{a-1}$. **(1p)**

Dar $r=-\frac{2}{5}\Rightarrow a=\frac{7}{2}$ **(1p)**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ
Municipiul Curtea de Argeş,
Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300
Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;
E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com
Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

2. a) Prin calcul direct, $(1-i)*i=i$. (5p)

b) Din comutativitate, rezultă $z*a=a*z\ \forall a,z\in\mathbb{C}$ (2p)

$z*a=a,\ \forall z\in\mathbb{C}\Leftrightarrow z(a+i)+ia-1-i=a,\ \forall z\in\mathbb{C}\Leftrightarrow\begin{cases}a+i=0\\ ia-1-i=a\end{cases}$. (2p)

Aşadar $a=-i$ (1p)

Din b) rezultă: $z*(-i)=-i, \forall z\in\mathbb{C}$ (3p)

c) $(2013-i)*(2012-i)*\ldots*(0-i)*\ldots*(2012+i)*(2013+i)=-i$ (2p)

Subiectul III –Varianta nr. 1 (enunțuri)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că $\frac{1}{e^{k+1}+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{e^k+1},\ \forall k\ge 0$.

2. Fie $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx,\ n\in\mathbb{N}$.

5p a) Să se arate că $I_{n-1}-I_n=\frac{1}{n\cdot 2^n},\ \forall n\ge 1$.

5p b) Să se calculeze I_0 şi să se demonstreze că $I_n=\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k},\ \forall n\ge 1$.

5p c) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k}=\ln 2$

Subiectul III –Varianta nr. 1 (barem de corectare)

1. a) $f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$ (3p)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{1}{2}$; (2p)

b) $f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0\Rightarrow f$ concavă pe $\mathbb{R}$. (5p)

c) Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[k,k+1]\Rightarrow\exists c\in(k,k+1)$ a.î. $f'(c)=f(k+1)-f(k)$. (3p)

$e^k+1<e^c+1<e^{k+1}+1$ (e^{x+1} este funcţie crescătoare)$\Rightarrow\frac{1}{e^{k+1}+1}<\frac{1}{e^c+1}<\frac{1}{e^k+1}$. (1p)

$$\frac{1}{e^{k+1}+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{e^k+1},\ \forall k\ge 0$$ (1p)

2. a) $I_{n-1}-I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}-x^n}{1-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}dx=\left.\frac{x^n}{n}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n\cdot 2^n},\ \forall n\geq 1.$ **(5p)**

b) $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$ **(3p)**

$\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1}-I_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k}\Rightarrow I_0-I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k}\Rightarrow I_n=\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot 2^k}$ **(2p)**

c) $0\leq\frac{1}{1-x}\leq 2,\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx\leq\int_0^{\frac{1}{2}}2x^n dx=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\to 0\Rightarrow I_n\to 0$ **(4p)**

din (b) rezultă concluzia. **(1p)**