OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a V- a

24 Ianuarie 2009

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră mulțimea de numere naturale A pentru care sunt îndeplinite simultan, condițiile: *i*) $2 \in A$;

ii) Dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;

iii) Dacă $x^2 + 1 \in A$, atunci $x \in A$.

7p) Să se arate că $\{1; 4; 5; 26\} \subset A$.

SUBIECTUL II (7p)

2p) a) Arătați că nu există numere naturale a şi b care să verifice egalitatea:

$$3a^2 + 5b^2 = 7^{2010}$$

2p) b) Determinați ultima cifră a numărului: $a = 2^{2009} + 3^{2009} + 4^{2009} + ... + 11^{2009}$.

3p) c) Determinați cardinalul mulțimii $M = \{x \in \mathbb{N} / 41 \cdot 7^x \le 343 \cdot 2009\}$

SUBIECTUL III (7p)

Se dă numărul natural $T = \overline{abc}$ scris în baza 10, unde a, b, c sunt cifre nenule.

4p) a) Să se demonstreze că suma resturilor împărțirii numărului T la a, b respectiv c este mai mică decât 24.

3p) b) Să se demonstreze că suma resturilor împărțirii numărului T la a, b respectiv c nu poate fi egală cu 23.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a VI- a
24 Ianuarie 2009

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numărul natural $a = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2007} + 3^{2008}$.

4p) a) Demonstrați că a este divizibil la 120;

3p) b) Determinați ultimele două cifre ale numărului natural a.

SUBIECTUL II (7p)

4p) a) Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ în baza zece care sunt pătrate perfecte știind că $4 \cdot \overline{ab} = 7 \cdot \overline{cd}$.

3p) b) Să se arate că 19 divide $4^{5n} - 5^{4n}$, pentru orice număr natural n.

SUBIECTUL III (7p)

Fie AB și CD două drepte concurente, $AB \cap CD = \{O\}$. Se consideră $(OP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, $(OT$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle POB$ și $(OR$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle TOD$.

4p) a) Dacă $m(\sphericalangle POR) = 140^\circ$, aflați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle AOD)$.

3p) b) Dacă $m(\sphericalangle POR) = 25^\circ$, aflați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle AOD)$.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a VII- a
24 Ianuarie 2009

SUBIECTUL I (7p)

Demonstrați că:

7p) $$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+...+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)<2, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$$

(G.M. nr. 10/2008)

SUBIECTUL II (7p)

4p) a) Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{n-2008}{2010}+\frac{n-2010}{2008}\in\mathbb{Z}$;

3p) b) Să se arate că $\frac{m^2-2008}{2010}+\frac{m^2-2010}{2008}\notin\mathbb{Z}$, $\forall m\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (7p)

Pe laturile triunghiului oarecare $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A)<60^\circ$, se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $\triangle ABM$ şi respectiv $\triangle ACN$. Se consideră punctul S astfel ca $ANSM$ să fie paralelogram.

4p) a) Să se demonstreze că $m(\sphericalangle BSC)=60^\circ$.

3p) b) Să se demonstreze că $\triangle BSC$ este echilateral.

SUBIECTUL IV (7p)

În patrulaterul convex $ABCD$, $M\in(AD), N\in(BC)$, M este mijlocul segmentului (AD), N este mijlocul segmentului (BC).

4p) a) Să se demonstreze că $MN=\frac{AB+CD}{2}$ dacă şi numai dacă $AB\parallel CD$

3p) b) Să se demonstreze că dacă $AB\parallel CD$, $(AD)\equiv(BC)$ şi $A_{ABCD}=MN^2$ atunci $AC\perp BD$.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a VIII- a

24 Ianuarie 2009

SUBIECTUL I (7p)

2p) a) Se consideră două numere reale a şi b astfel încât $b - a = 1$. Demonstrați că mulțimea $(a, b] \cap \mathbb{Z}$ conține exact un element.

3p) b) Demonstrați că pentru fiecare două numere naturale nenule m şi n, există un unic număr natural x, astfel încât: $\dfrac{1}{mx - \sqrt{mn+16} - 1} \geq \dfrac{1}{m}$.

2p) c) Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel ca: $\dfrac{1}{mx - \sqrt{mn+16} - 1} \geq \dfrac{1}{m}$ şi $n - m = 8$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL II (7p)

Fie numărul $a = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

3p) a) Să se demonstreze că $[2a] = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $[2a]$ reprezintă partea întreagă a numărului $2a$.

4p) b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{a\} = \dfrac{1004}{2009}$, unde $\{a\} =$ partea fracționară a lui a.

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră triunghiul $\triangle BCD$, un punct A în exteriorul planului triunghiul $\triangle BCD$. Fie S mijlocul segmentului (BD) şi R mijlocul segmentului (AC). Prin mijlocul M al segmentului (AB) se construieşte un plan paralel cu AC şi BD care intersectează (BC), (CD) şi (DA) în N, P şi respectiv Q.

4p) a) Să se demonstreze că dreptele MP, NQ şi SR sunt concurente.

3p) b) Determinați măsura unghiului ascuțit format de dreptele AC şi BD, ştiind că aria patrulaterului $MNPQ$ este $A_{MNPQ} = \dfrac{1}{8} AC \cdot BD$.

SUBIECTUL IV (7p)

Pătratul $ABCD$ şi triunghiul echilateral ABE sunt incluse în plane distincte. Se consideră punctele $M, N \in (AB)$ astfel încât $AM = MN = NB$ şi se notează cu G şi respectiv F centrele de greutate ale triunghiurilor BEM şi ADN.

4p) a) Demonstrați că $FG \parallel (CDE)$.

3p) b) Determinați lungimea segmentului FG ştiind că $AB = 18$ cm, iar măsura unghiului format de dreptele AB şi DE este egală cu măsura unghiului format de dreptele AD şi CE.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.