PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU OLIMPIADA LOCALĂ

MATEMATICĂ clasa a VII-a - februarie 2019

PROBLEMA NR. 1

Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<1009.$

Soluție:

Folosim inegalitatea mediilor $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ ....**(1p)**

$\sqrt{1\cdot 2}<\frac{1+2}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}<\frac{1}{2}$; $\sqrt{2\cdot 3}<\frac{2+3}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}<\frac{1}{2}$;......; $\sqrt{2018\cdot 2019}<\frac{2018+2019}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<\frac{1}{2}$ ...**(4p)**

Adunând relațiile $\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<2018\cdot\frac{1}{2}=1009$...**(2p)**

PROBLEMA NR. 2

Fie ABCD pătrat, M un punct oarecare pe (AB), iar $N\in(BC)$ *astfel încât* $MN\perp MD$. *Arătați că* $AM\cdot AB+CN\cdot CB=DM^2$.

Soluție: desen corect...**(1p)**

Notăm cu a latura pătratului, AM=x, CN=y

Scriem Teorema lui Pitagora în ΔDMN: $DM^2+MN^2=DN^2$..**(2p)**

$a^2+x^2+(a-x)^2+(a-y)^2=a^2+y^2$ ....**(1p)**

$a^2+x^2=a\cdot x+a\cdot y$ ....**(2p)**

$DM^2=AM\cdot AB+CN\cdot CB$ ....**(1p)**

PROBLEMA NR. 3

Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O și $M\in(AC)$, astfel încât AM este o treime din MC. Paralela prin M la BD, intersectează pe BC în E și pe CD în F. Să se arate că dacă $FC=3EO$, atunci triunghiul ADB este dreptunghic.

Detalii rezolvare	Barem asociat
O centrul paralelogramului $ABCD\Rightarrow O$ mijlocul lui (BD) și cum AM este o treime din MC rezultă că M este mijlocul lui (AO) (1)	1
Fie E_1 și F_1 intersecțiile dreptelor AB și AD cu FE. Din (1) și ME_1// OB$\Rightarrow$ E_1mijlocul lui AB și $2ME_1=OB(2)$	1
Analog F_1mijlocul lui AD și $2MF_1=OD$ (3); Din (2), (3) și $OB=OD\Rightarrow ME_1==MF_1(3)$	1
Din paralelogramele FE_1BDși $DBEF_1\Rightarrow BE_1=DF$ și $DF_1=BE\Rightarrow\Delta BEE_1\equiv\Delta DFF_1$ $(L.U.L)\Rightarrow FF_1=EE_1$ (4).Din (3) și (4) $\Rightarrow M$ mijlocul lui (FE).(4)	1
Din(4) și $CM=3MO\Rightarrow O$ este centrul de greutate al triunghiului $FEC(5)$	1
Fie R mijlocul lui (FC) și (5) $\Rightarrow EO=\frac{2}{3}ER$ și cum $FC=3EO\Rightarrow$ m($\sphericalangle E$)=90^0	1
În paralelogramul $DBEF_1$ m($\sphericalangle E$)=90^0 $\Rightarrow$ m($\sphericalangle ADB$)=90^0	1

PROBLEMA NR. 4

În triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $(\sphericalangle A) = 40^0$, considerăm punctul $D \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 60^0$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în punctul E, iar punctul T, aparține bisectoarei unghiului A, astfel încât $E \in (AT)$și $ET = AB$. Arătați că patrulaterul $ABTC$ este romb.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $F \in (ET)$, astfel încât m($\sphericalangle FBC$)=10^0	1
În ΔABCisoscel m($\sphericalangle BAC$)=40^0, m($\sphericalangle ABC$)=70^0, AE bisectoarea lui $A \Rightarrow AE \perp BC$	1
În ΔABF, m($\sphericalangle BAF$)=20^0, m($\sphericalangle ABF$)=70^0+10^0=80^0 $\Rightarrow \Delta ABF$ isoscel, cu AB=AF(1)	1
În ΔEBF, m($\sphericalangle EBF$)= m($\sphericalangle EBC$)= m($\sphericalangle CBF$)= 10^0+10^0=20^0 și $FE \perp BC$ $\Rightarrow BE$=BF și m($\sphericalangle BEF$)= 80^0	1
Din AB=ET, BF=BE și m($\sphericalangle ABF$)= m($\sphericalangle BET$)=80^0 $\Rightarrow \Delta ABF \equiv \Delta TEB$ $(L.U.L)$ $\Rightarrow BT$=AF (2).Din (1) și (2) $\Rightarrow AB = BT$ (3)	1
În ΔABC isoscel ,AE bisectoarea lui $A \Rightarrow AE$ mediatoarea (BC), dar T$\in AE \Rightarrow$ $TB = TC$ (4)	1
Din AB=AC, (3) și (4) $\Rightarrow ABTC$ romb	1

PROBLEMA NR. 5

a) Arătați că numărul $a = \left|2\sqrt{3}-4\right| + \left|3\sqrt{2}-4\right| - \left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|$ este întreg.

b) Calculați $b+c$, unde $b = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+...+\frac{99}{100}$ și $c = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{50}}{2}$.

PROBLEMA NR. 6

a) Arătați că $a = b = c$, știind că $\left(a-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2b-\sqrt{12}\right)^2 + \left(3c-\sqrt{27}\right)^2 = 0$, unde $a,b,c \in \mathrm{R}$.

b) Aflați numerele întregi x și y, știind că $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(y-2)^2} = 1$.

PROBLEMA NR. 7

a) Determinați suma numerelor naturale $\overline{ab}$ pentru care numărul $x = \sqrt{2\overline{ba} + a + \overline{ab} - 8b}$ este natural;

b) Rezolvați în Z ecuația $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{x^2-x} = \frac{2015}{2016}$;

Soluție: a) $x = \sqrt{13(a+b)} \in N \Rightarrow a+b = 13$ **2p**

$S = 49 + 58 + 67 + 76 + 85 + 94 = 429$..**2p**

b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$......................**2p**

$x = 2016$..**1p**

PROBLEMA NR. 9

Fie triunghiul ABC cu m(∢A)=45°, m(∢C)=105° și AC $= 12\sqrt{2}$ *cm. Aflați aria unui pătrat a cărui latură este egală cu lungimea înălțimii duse din B în triunghiul ABC.*

Soluție: desen corect……………………………………………………………………………………**1p**

Notăm cu T piciorul înălțimii duse din C pe latura AB⇒ΔACT isoscel ⇒AT=CT=12cm………………..**1p**

m(∢ABC)=30 °⇒BC=24 cm ⇒ $BT = 12\sqrt{3}$ cm⇒ $AB = 12(1+\sqrt{3})cm$……..…………………**2p**

Notăm cu M piciorul înălțimii duse din B pe prelungirea laturii AC⇒ΔABM dreptunghic isoscel………**1p**

$\mathrm{BM} = \mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AB}\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ cm……………………………………………………………**1p**

$A_{pătrat} = BM^2 = [6\sqrt{2}(1+\sqrt{3})]^2 = 72(4+2\sqrt{3}) = 144(2+\sqrt{3})cm^2$……………………....**1p**

PROBLEMA NR. 10

a) Să se arate că $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

b) Să se demonstreze că: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2016^2}<1$.

SOLUTIE

a) $n > n-1 \Leftrightarrow n^2 > n\cdot(n-1) \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\cdot(n-1)}$ ……………………………………..2 puncte

b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2016^2} < \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2015\cdot 2016}$ ………………..2 puncte

$S = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2015\cdot 2016} \Rightarrow S = 1-\frac{1}{2016}$ ……………………………2 puncte

Finalizare ……………………………………………………………………………1 punct

PROBLEMA NR. 11

a) Se dă un triunghi oarecare ABC și MN linie mijlocie ($M \in AB$, $N \in AC$). Ducem perpendiculare din M și N pe latura BC care intersectează latura BC în punctele D respectiv E. Știind că $MNED$ este un pătrat cu perimetrul $8\ cm$ aflați cât la sută reprezintă aria pătratului $MNED$ din aria triunghiului ABC?

b) Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (DC)$ astfel încât $m(<EAB) = 15°$ și $m(<DAF) = 30°$. Demonstrați că dacă $[EA$ este bisectoarea unghiului FEB, atunci $ABCD$ este pătrat.

a) $P_{MNED} = 8cm \Rightarrow MN = 2cm \Rightarrow A_{MNED} = 4cm^2$ ……………………………………1 punct

$AA' \perp BC$, $A' \in (BC)$. $AA' = 2\cdot MD = 4cm$, $BC = 2\cdot MN \Rightarrow A_{ABC} = 8cm^2$ …..1 punct

$\frac{p}{100}\cdot A_{ABC} = A_{MNED} \Rightarrow p = 50$ ………………………………………………………1 punct

b) $m(\sphericalangle EAF) = 45°$, $m(\sphericalangle AEB) = 75°$, $m(\sphericalangle AFE) = 60°$ ……………………………1 punct

Construim $AN \perp EF$, $N \in EF$ ……………………………………………………1 punct

$\Delta FAN \equiv \Delta FAD$ $(I.U.)$ ……………………………………………………………0,5 puncte

$\Delta NAE \equiv \Delta BAE$ $(I.U.)$ ……………………………………………………………0,5 puncte

$AD = AN = AB \Rightarrow ABCD$ pătrat ……………………………………………………1 punct

FIȘA NR. 1 PROBLEMA SISTEM GRILĂ

1. Fie n cel mai mic număr natural nenul care înmulțit pe rând cu numerele $\frac{5}{12}$, $\frac{27}{36}$ și $\frac{31}{20}$, dă ca rezultate numere naturale. Suma cifrelor lui n este:

a) 6 **b)** 9 **c)** 16 **d)** 18

2. Dacă $\sqrt{\overline{abc5}}+\sqrt{\overline{bc5}}+\sqrt{\overline{c5}}=105$, atunci cea mai mare dintre cifrele a, b și c este:

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9

3. Dacă $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{39}-\frac{1}{40}$, atunci avem:

a) $A\le\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}<A<1$ **c)** $1\le A<\frac{3}{2}$ **d)** $A\ge\frac{3}{2}$

4. În trapezul ortodiagonal ABCD avem $AB \parallel CD$, $AC\cap BD=\{O\}$, iar $[MN]$ este linie mijlocie, $M\in[AD]$. Dacă perimetrul lui ABCD este 24 cm, atunci perimetrul lui OMN este:

a) 4 *cm* **b)** 6 *cm* **c)** 8 *cm* **d)** 12 *cm*

5. Fie $S=\sqrt{\frac{12}{11}+\frac{13}{22}+\frac{14}{33}+...+\frac{110}{1089}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}\right)}$. Atunci S este egală cu:

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **c)** 3 **d)** $\frac{3}{11}$

6. Numărul tripletelor de numere întregi (x,y,z) care verifică egalitatea $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(y+2)^2}+\sqrt{(z+3)^2}=1$, este:

a) 1 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 9

7. Cardinalul mulțimii $A=\left\{(a,b)/\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\in\mathbb{N}\ cu\ a,b\in\mathbb{N}^*\right\}$ este:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

8. Dacă $A=\left\{(x,y)/x,y\in\mathbb{Z}^*\text{ astfel încât }\frac{x+1}{2}-\frac{3}{y+1}=4\right\}$, atunci cardinalul mulțimii A este:

a) 3 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 7

9. Fie ABCD un paralelogram și $M\in(DC)$ astfel încât $\frac{DM}{MC}=\frac{1}{3}$. Dacă $AM\cap BC=\{N\}$, atunci raportul dintre aria triunghiului DMN și aria trapezului BNDA, este:

a) $\frac{3}{20}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{4}{9}$ **d)** $\frac{2}{15}$

10. Numerele naturale x, y, z verifică relația $\frac{x}{x+5}=\frac{3y}{2y+3}=\frac{4z}{3z+20}$. Valoarea maximă a sumei $x+y+z$, este:

a) 0 **b)** 28 **c)** 44 **d)** 300

11. Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii $[BC]$. Construim $MD \perp AB$, $D \in (AB)$ și $ME \perp AC$, $E \in (AC)$. Dacă $[AM] \equiv [DE]$, care dintre următoarele afirmații nu este adevărată?

a) $A_{BDM} = A_{MEC}$ **b)** $BC = 2AM$ **c)** $m(\sphericalangle BAC) = 60^0$ **d)** $DM \parallel AE$

12. Dacă a și b $\in \mathbb{N}^*$ cu $(a,b) = 1$ și $\sqrt{2017 + \frac{a}{b}} = 2017\sqrt{\frac{a}{b}}$, atunci b este egal cu:

a) $2017^2 - 1$ **b)** 2017^2 **c)** 2017 **d)** $2017^2 + 1$

13. Se dă triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 120^0$ și $AB = 2AC$. Fie D simetricul lui A față de mediana $[CM]$ a triunghiului ABC. Cât la sută reprezintă aria triunghiului BCM din aria patrulaterului ABDC?

a) 25% **b)** 33,(3)% **c)** 50% **d)** 36%

14. Fie triunghiul echilateral ABC și punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea $\sphericalangle ABD$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Raportul $\frac{AE + DC}{BD}$ este egal cu:

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. Fie paralelogramul ABCD astfel încât $3BD = 2DA$ și $m(\sphericalangle ADB) = 60^0$. Dacă $AB = \sqrt{3}$ cm, atunci AC este:

a) $2\sqrt{3}$ cm **b)** $3\sqrt{2}$ cm **c)** 3 cm **d)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

16. Dacă S este numărul tripletelor de numere reale (x, y, z) care verifică relația: $4 \cdot ([x] + [y] + [z]) + (x + y + z) = 2018$, atunci:

a) $S = 2017$ **b)** $S = 0$ **c)** $S = 2018$ **d)** $S > 2018$

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

17. Câte triplete de numere întregi (a,b,c) verifică egalitatea $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2017}$?

a) 3 **b)** 6 **c)** 12 **d)** 2017

18. Fie ABCD un pătrat, M simetricul lui B față de A și $N \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMN) = 15^0$. Dacă $AC = 2\sqrt{2}\ cm$, atunci $[MN]$ are lungimea:

a) 2 cm **b)** $\sqrt{2}$ cm **c)** $2\sqrt{2}$ cm **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

BAREM DE CORECTARE FIȘA NR. 1 -SISTE GRILĂ

	a	b	c	d
1	■			
2		■		
3		■		
4				■
5			■	
6			■	
7				■
8				■
9	■			
10			■	
11			■	
12	■			
13		■		
14	■			
15	■			
16		■		
17			■	
18			■	