INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VÂLCEA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Mate.info.ro profu' de mate

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Clasa a IX-a

Subiectul I

a) Determinați mulțimea: $A = \{n \in \mathbb{Z} / \sqrt{n^2 + n + 1} \in \mathbb{Z}\}$.

Prelucrare Gazeta matematică seria B nr. 1/2007

b) Fie $E(x,y) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{y+1}}$. Să se calculeze $E(x,y)$ pentru:

$$x = \frac{2a^2 - 2a + 3}{a^2 + 2} \quad \text{și} \quad y = \frac{2 - 4a}{a^2 + 2}$$

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^2 - 4x - 4\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 7 = 0$

Subiectul II

a) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 5 \\ [x] + 2[y] = 4 \end{cases}$,

unde $[x]$ = partea întreagă a numărului real x.

b) Să se demonstreze că:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}} < 2\sqrt{2019}$$

c) Fie numerele reale strict pozitive a,b,c. Să se demonstreze că ecuațiile :
$ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ și $cx^2 + ax + b = 0$
nu pot avea toate rădăcini reale.

Subiectul III

Pe laturile patrulaterului convex ABCD, fie punctele $M \in AB, N \in BC, P \in CD$ și $Q \in DA$, astfel încât $\overline{MB} = (a + \lambda)\overline{AB},\ \overline{NB} = (b - \lambda)\overline{CB},\ \overline{DQ} = (b + \lambda)\overline{DA}$ și $\overline{DP} = (c - \lambda)\overline{DC}$, cu a,b,c constante reale și λ parametru variabil. Să se arate că vectorul $\vec{v} = \overline{MP} + \overline{NQ}$ are modulul constant, când λ variază.

Fiecare subiect are 30 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:

prof. Smeureanu Florin Dorian
prof. Armășescu-Diaconescu Claudia
prof. Cotoarbă Cristian
prof. Ciobotaru Petre
prof. Pană Cătălin
Tehnoredactare: inf. Fuscel Ion Cristian

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Barem de corectare

Clasa a IX-a

Subiectul I (30p)

a) $(\forall)\mathrm{n} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\,;1\}$ avem: $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2 \Rightarrow$ 4p

$\Rightarrow\ n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$, iar 2p

$0 \in A\,, -1 \in A$ rezultă $A = \{0\,, -1\}$ 4p

b) $\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+2}}$ 2p

$\sqrt{y+1} = \frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}}$ 2p

$E_{(x,y)} = \frac{|a-1|+|a-2|}{|a-1|-|a-2|}$ 2p

$E_{(x,y)} = \begin{cases} 2a-3\,, a<1 \\ \frac{1}{2a-3}\,, 1 \le a \le 2 \\ 2a-3\,, a>2 \end{cases}$ 4p

c) $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ 2p

Ecuația devine: $x^2 - 4x - 4|x-2| + 7 = 0$ 2p

$x \in [2;\infty)$ avem $x_1=3$, $x_2=5$ 3p

$x \in (-\infty\,;2)$ avem $x_3= -1$, $x_4=1$ 3p

Subiectul II (30p)

a) Rezolvând sistemul obținem: [x] = -2 și [y] = 3 .... 5p

Rezultă $x \in [-2;-1)$ și $y \in [3;4)$ 5p

b) Demonstrăm prin inducție matematică inegalitatea

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$ 8p

Caz particular n = 2019 .... 2p

c) Presupunem că toate ecuațiile au rădăcini reale. Rezultă:

$\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0 \\ a^2 - 4bc \ge 0 \\ c^2 - 4ab \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 \ge 4ac\ \ (1) \\ a^2 \ge 4bc\ \ (2) \\ c^2 \ge 4ab\ \ (3) \end{cases}$ 3p

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} \ge \frac{4ac}{4bc} \Leftrightarrow b^3 - a^3 \ge 0 \Leftrightarrow (b-a)(b^2+ab+a^2) \ge 0 \Leftrightarrow b \ge a$

Din (2) și (3) obținem $a \ge c$

Din (3) și (1) obținem $c \ge b$ 2p

Deci $b \ge a \ge c \ge b \Rightarrow a = b = c$ 3p

Dacă $a = b = c \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ cu $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$ 2p

Subiectul III (30p)

Avem $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0$ 1p

$\bar{v}=\overline{MP}+\overline{NQ}=-\overline{AB}-(a+\lambda)\overline{AB}+\overline{AD}+(c+\lambda)\overline{DC}+(b-\lambda)\overline{CB}+\overline{BA}+\overline{AD}+(b+\lambda)\overline{DA}=$

.... 5p

$$=-(a+2+\lambda)\overline{AB}+(2-b-\lambda)\overline{AD}+(c+\lambda)\overline{DC}+(b-\lambda)\overline{CB}=$$

$$=-(2+a+\lambda)\overline{AB}+(2-b-\lambda)\overline{AD}+(c+\lambda)\overline{DC}+(b-\lambda)(\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DC})=$$

.... 10p

$$=-(2+a+\lambda+b-\lambda)\overline{AB}+(2-b+\lambda+b-\lambda)\overline{AD}+(c+\lambda+b-\lambda)\overline{DC}=$$

$$=-(2+a+b)\overline{AB}+2\overline{AD}+(c+b)\overline{DC}$$ 9p

Deci $\vec{v}=-(2+a+b)\overline{AB}+2\overline{AD}+(c+b)\overline{DC}\Rightarrow\overline{|v|}=\text{constant, nu depinde de }\lambda$ 5p

*Orice soluție corectă, diferită de cea din barem se punctează corespunzător.

Se acordă 10 puncte din oficiu.