INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VÂLCEA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Mate.info.ro profu' de mate

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI
Etapa județeană 18.01.2019
Clasa a X-a

Subiectul I

a) Determinați numerele reale x și y astel încât $3^x + 3^y = 30$ și $\log_3 x - \log_3 y + 1 = 0$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
” Dacă numerele reale x și y verifică egalitățile de la punctul anterior și $\log_y(x+3) + \log_y(x+4) + \log_y(x+100) = \log_y z$, atunci z=2020 ”.

Prelucrare Gazeta Matematică nr. 9/2012

Subiectul II

a) Arătați că $(\forall)x, a \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:
$(3 + 2\cos a - 2\sin a)x^2 - 2(\sin a + \cos a)x + 1 \geq 0$

b) Aflați funcția de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică relația
$f(x - f(y)) = 1 - x - y$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x + 1 + 4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x-3}} = 4$

Subiectul III

a) În triunghiul ABC are loc relația: $b(b+a)(b+c) = b(a^2 + c^2) + a^3 + c^3$, unde a,b,c sunt laturile triunghiului. Demonstrați că unghiurile A,B,C sunt în progresie aritmetică.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $3^{\log_5\left(x + \frac{4}{x}\right)} = \frac{8x - x^2 - 4}{x}$

Fiecare subiect are 30 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Pană Cătălin
prof. Dicu Florentina
prof. Armășescu-Diaconescu Claudia
prof. Statie Silviu
prof. Cotoarbă Cristian
Tehnoredactare: inf. Fuscel Ion Cristian

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Barem de corectare

Clasa a X-a

Subiectul I (30p)

a) C.E. $x, y > 0$ 2p
$\log_3\left(\frac{x}{y}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$ 5p
$\Rightarrow 3^x + 3^{3x} = 30 \Rightarrow (3^x - 3)(3^{2x} + 3 \cdot 3^x + 10) = 0$ 10p
$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$ 3p

b) x=1, y=3 $\Rightarrow \log_3 4 + \log_3 5 + \log_3 101 = \log_3 z$ 3p
$\Rightarrow \log_3(4 \cdot 5 \cdot 101) = \log_3 z \Rightarrow z = 2020$ 4p
$\Rightarrow$ Propoziția este adevărată 3p

Subiectul II (30p)

a) $\Delta = 4(\sin a + \cos a)^2 - 4(3 + 2\cos a - 2\sin a)$
$\Delta = 8(\sin a \cos a - \cos a + \sin a - 1)$ 4p
$\Delta = 8(1 + \cos a)(\sin a - 1) \Rightarrow 1 + \cos a \geq 0$ *și* $\sin a - 1 \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$ 4p
Cum $3 + 2\cos a - 2\sin a \geq 0$ rezultă inegalitatea 2p

b) $f(x) = a \cdot x + b, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a(x - ay - b) + b = 1 - x - y$ 4p
$ax - a^2 y - ab + b = 1 - x - y \Rightarrow a = -1$ *și* $b = \frac{1}{2}$ 4p
$\Rightarrow f_x = -x + \frac{1}{2}$ 2p

c) C.E. $x \geq 3 \Rightarrow x \in [3, \infty)$ 2p
$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3} - 2)^2} = 4$ 3p
$\Rightarrow \sqrt{x-3} + 2 + \left|\sqrt{x-3} - 2\right| = 4$ 2p
Dacă $x \in [3, 7)$ avem $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} + 2 = 2$ (A) 1p
Dacă $x \geq 7$ avem $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x = 7$ 1p
Deci soluția este $x \in [3, 7]$ 1p

Subiectul III (30p)

a) $\Rightarrow b^3 + b^2 c + ba^2 + abc - ba^2 - bc^2 - a^3 - c^3 = 0$ 2p

$b^2(a + b + c) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + b^3 - 2abc - a^2 b - bc^2 = 0$ 2p

$\Rightarrow b^2(a + b + c) - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + b(a + b + c)(b - a - c) = 0$ 3p

$\Rightarrow ac - a^2 - c^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ 1p

$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$ 2p

b) C.E. $x > 0$ 2p

Ecuația devine $3^{\log_5(x+\frac{4}{x})} = 8 - (x + \frac{4}{x})$ 4p

Notez $t = x + \frac{4}{x} > 0 \Rightarrow 3^{\log_5 t} = 8 - t$ 6p

Ecuația aceasta are soluție unică t = 5.. 4p

$\Rightarrow$ x $+ \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow x_1 = 1\,, x_2 = 4$ 4p

*Orice soluție corectă, diferită de cea din barem se punctează corespunzător.

Se acordă 10 puncte din oficiu.