INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VÂLCEA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Clasa a XI-a

Subiectul I

Fie $x(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ x(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$

a) Determinați $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $x(a) = A + I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Arătați că $(\forall)\ x(a)\,, x(b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația

$x(a) \cdot x(b) = x\big((a+1)(b+1) \quad -1\big)$

c) Determinați $(x(a))^{2019}$.

Subiectul II

Fie funcția $f\colon (1;\infty) \to \mathbb{R}\,, f(x) = 2x + \ln(x+1) - \ln(x-1)$

a) Determinați asimptotele funcției f la graficul funcției

b) Calculați $\lim_{x\to\infty} x(f_{(x)} - 2x)$

c) Demonstrați că ecuația: f(x+1)=f(x)+1 are cel puțin o soluție în (1;∞).

Subiectul III

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $\mathrm{f}\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}\,, \mathrm{f}(\mathrm{x}) = x^3 + 2x + 3$ iar

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

a) Arătați că $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

b) Arătați că $\Delta_1 = \Delta_2$

c) Fie $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $C(c, f(c))$ trei puncte pe graficul funcției f, având coordonatele numere naturale. Arătați că aria Δ ABC este număr natural.

Fiecare subiect are 30 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Smeureanu Florin Dorian
prof. Armășescu-Diaconescu Claudia
prof. Dafincescu Irinel
prof. Aron Oana
prof. Cotoarbă Cristian
prof. Pană Cătălin
prof. Mazilu Marius
Tehnoredactare: inf. Fuscel Ion Cristian

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Subiectul I (30p)

a) $x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ -a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ -a & -a \end{pmatrix}$ 10p

b) $x(a) \cdot x(b) = (I_2 + A)(I_2 + B) =$..2p

$= \left[I_2 + a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]\left[I_2 + b\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] =$ 2p

$= I_2 + (a+b)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + ab\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 =$...4p

$= I_2 + (a+b+ab)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = x((a+1)(b+1)-1)$ 2p

c) Din $b) \Rightarrow (x(a))^2 = x((a+1)^2 - 1)$ 4p

Prin inducție obținem $(x(a))^{2019} = x((a+1)^{2019} - 1)$ 6p

Subiectul II(30p)

a) x=1 asimptotă verticală 5p

y=2x asimptotă oblică spre +∞ 5p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(f_{(x)} - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x \ln\frac{x+1}{x-1}) =$ 3p

$= \ln \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{2}{x-1})^x$ 3p

$= \ln e^2 = 2$ 4p

c) $f_{(x+1)} = f_{(x)} + 1 \Rightarrow 2 + \ln(x+2) - \ln x = \ln(x+1) - \ln(x-1) + 1$ 1p

$\Rightarrow 2 + \ln\frac{x+2}{x} = \ln\frac{x+1}{x-1} + 1$ 2p

$\Rightarrow \ln\frac{x+2}{x} - \ln\frac{x+1}{x-1} + 1 = 0$ 2p

Fie $g_{(x)} = \ln\frac{x+2}{x} - \ln\frac{x+1}{x-1} + 1$

Cum $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} g_{(x)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} g_{(x)} = 1 \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ există $a \in (1,\infty)$ a.î. g(a)=0 .... 5p

Subiectul III (30p)

a) $\Delta_1 = bc^3 + ab^3 + ca^3 - ba^3 - cb^3 - ac^3 \Rightarrow$.. 5p

$\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 5p

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3+2a+3 & b^3+2b+3 & c^3+2c+3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a+3 & 2b+3 & 2c+3 \end{vmatrix} =$ 5p

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta_1$ 5p

c) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta_2| = \frac{1}{2}|\Delta_1| = \frac{1}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$ 5p

Cum cel puțin 2 dintre numerele a,b,c, au aceiași paritate, $\Rightarrow$ diferența lor se divide cu 2,

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} \in \mathbb{N}$ 5p

[*]Orice soluție corectă, diferită de cea din barem se punctează corespunzător.

Se acordă 10puncte din oficiu.