INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VÂLCEA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Mate.info.ro profu' de mate

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

"TEHNICI MATEMATICE" – ediția XVI

Etapa județeană 18.01.2019

Clasa a XII-a

Subiectul I

1. Determinați numerele întregi a și b pentru care are loc egalitatea: $a\sqrt{3}+b=\sqrt{3}+1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.
2. Determinați minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{(x)}=x^2-4x+3$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2\log_2 x=\log_2(x+2)$.
4. Determinați numărul submulțimilor ordonate cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ sunt perpendiculari.
6. Calculați $\cos(a+b)$ știind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, iar $\sin a=\frac{1}{2}$ și $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricile $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
   a) Calculați: det B
   b) Arătați că: AB=BA
   c) Determinați numerele reale a pentru care: det (B+aA)=1.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-3(x+y-4)$ pentru orice x și y numere întregi.
   a) Calculați: $2019\circ 3$
   b) Arătați că: $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$
   c) Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție.

Subiectul III

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{(x)}=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.
   a) Determinați ecuația asimptotei graficului funcției f la $+\infty$
   b) Demonstrați că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$
   c) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră $I_n = \int \frac{x^n}{x^2+1}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Calculați: I_2 și I_3
   b) Demonstrați că: $I_{2019} + I_{2017} = \frac{x^{2018}}{2018} + c$
   c) Calculați: $\int_0^1 \frac{x^{2019}}{x^2+1}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{2015}}{x^2+1}\, \mathrm{dx}$

Fiecare subiect are 30 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Dicu Florentina
prof. Smeureanu Florin Dorian
prof. Cotoarbă Cristian
prof. Constantinescu Dragoș
prof. Drăgan Elena
prof. Statie Silviu
Tehnoredactare: inf. Fuscel Ion Cristian

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
”TEHNICI MATEMATICE” – ediția XVI
Etapa județeană 18.01.2019
Barem de corectare
Clasa a XII-a

Subiectul I (30p)

1. $a\sqrt{3}+\mathrm{b}=\sqrt{3}+1+\frac{2}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow a\sqrt{3}+\mathrm{b}=\sqrt{3}+1+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \Leftrightarrow \mathrm{a}\sqrt{3}+b=2\sqrt{3}+2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\mathrm{a}-2)\sqrt{3}+(b-2)=0$ 3p
   $\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=2$ 2p
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{(x)}=x^2-4x+3, a=1>0 \Rightarrow f_{min}=y_v=-\frac{\Delta}{4a}$ 2p
   $\Delta=b^2-4ac=16-12=4 \Rightarrow f_{min}=-\frac{4}{4} \Rightarrow f_{min}=-1$ 3p
3. $2\log_2 x=\log_2(x+2)$ condiții de existență: $\begin{cases} x>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)$ 1p
   $\Rightarrow \log_2 x^2=\log_2(x+2) \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0$ 2p
   $\Delta=9 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1 \Rightarrow x=2$ soluție 2p
4. $\{1,2,3,4,5,6\}$ are 6 elemente
   Numărul submulțimilor ordonate cu trei elemente este A_6^3 .... 3p
   $A_6^3=\frac{6!}{3!}=120$ submulțimi ordonate cu 3 elemente 2p
5. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow 2(a+1)+3\cdot 2=0 \Leftrightarrow 2a+8=0$ 3p
   $a=-4$ 2p
6. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ 1p
   $\sin a=\frac{1}{2}, a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos a=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1p
   $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}, b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow b=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin b=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 1p
   $\cos(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 2p

Subiectul II(30p)

1.
   a) $\det B=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0-1-0-0$ 3p
   $\Rightarrow det\ B=-1$ 2p
   b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=A$ 2p
   $B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=A$ 2p
   $\Rightarrow AB=BA$ 1p
   c) $B+aA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ 2p

$\det(B + aA) = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 + a^2 - 1 = 2a^2 - 1$ 1p

$\det(B + aA) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \text{a} = \pm 1$.. 2p

2. $\mathbb{Z}, x \circ y = xy - 3(x + y - 4), \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$

   a) $2019 \circ 3 = 2019 \cdot 3 - 3(2019 + 3 - 4)$ 2p

   $\Rightarrow 2019 \circ 3 = 3$ 3p

   b) $x \circ y = xy - 3(x + y - 4) = xy - 3x - 3y + 12 = x(y - 3) - 3y + 9 + 3 =$ 2p

   $= x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 = (y - 3)(x - 3) + 3$ 3p

   c) $x' \in \{2,4\}$ 5p

Subiectul III (30p)

1.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} f_{(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$ 5p

   b) $f'_{(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1$ 2p

   $x^2 + 2x + 2 > (x + 1)^2 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 1 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 < 0 \Rightarrow f'_{(x)} < 0$ 3p

   c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f_{(x)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f_{(x)} = 1 \\ f\ \textit{continuă și monotonă} \end{array}\right\} \Rightarrow Im\ f = (1, \infty)$ 5p

2.

   a) $I_2 = \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = x - arctg\ x + C$ 2p

   $I_3 = \int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx = \int (x - \frac{x}{x^2+1})\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + C$ 3p

   b) $I_{2019} + I_{2017} = \int \frac{x^{2017}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \frac{x^{2018}}{2018} + C$ 5p

   c) $\int_0^1 \frac{x^{2019}}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{2017}}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2018}$ (1) 2p

   $\int_0^1 \frac{x^{2017}}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{2015}}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2016}$ (2) 2p

Relația (1) - (2) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2019}}{x^2+1}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{2015}}{x^2+1}\, dx = -\frac{2}{2018 \cdot 2016}$ 1p

*Orice soluție corectă, diferită de cea din barem se punctează corespunzător.

Se acordă 10puncte din oficiu.