

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstrați că $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq p$, unde p este semiperimetrul triunghiului.

Clasa a VIII-a

Valer Pop

Soluție

Pentru numerele reale pozitive x și y avem inegalitatea evidentă:

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}.$$

Aplicând această inegalitate avem:

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$$

$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}$$

$$\frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$$

$$\text{După care : } \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4} = \frac{2(a+b+c)}{4} = \frac{a+b+c}{2} = p.$$