TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic*
13.12.2018

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie legea de compoziție $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x * y = x + y - 3$. Să se calculeze $1 * (-3)$.

5p **2.** Să se rezolve în Z_4 ecuația $\hat{3}x + \hat{3} = \hat{0}$.

5p **3.** Pe mulţimea $M = (0, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt{2xy}$. Să se demonstreze că $8 * 81 \in \mathbb{N}$

5p **4.** Calculați: $\int \frac{x^3+5x+3}{x^2} dx, x > 0$.

5p **5.** Să se determine primitiva funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$ care se anulează în $x = 1$

5p **6.** Calculați: $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea G = (3, ∞) se consider legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \ \forall x, y \in G$.

5 **a)** Să se arate că $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al acestei legi.

5p **c)** Să se calculeze $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 100$

2.Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

5p **a)**Arătați că $I_2 \in G$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **b)**Să se demonstrezecă $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$, oricarear fi $x, y \in \mathbb{R}^*$

5p **c)**Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Pentru $x \leq -1$, să se determine primitivele funcţiei.

5p **c)** Calculaţi $\int_0^1 f(x) dx$.

2. Se consideră funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 100$

5p **a)** Să se determine funcţia $f: R \to R$, astfel încât F să fie o primitivă a funcţiei f..

5p **b)** Să se demonstreze că F este strict descrescătoare pe intervalul (2,3).

.5p **c)** Să se calculeze $\int F(x) F'(x) dx$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Științe ale naturii*
13.12.2018

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie legea de compoziţie $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $x \circ x = 4$

5p **2.** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$: $\hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{2}$

5p **3** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție, $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $x \circ (-4) = (-4) \circ x = -4, \forall\, x \in \mathbb{R}$

5p **4.** Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Să se determine primitiva funcției pentru care F(0) = 1

5p **5.**Calculați: $\int_1^2 \frac{dx}{9-x^2}$.

5p **6.** Arătați că funcția F: (0, ∞) → ℝ, F(x) = $\frac{lnx}{x}$ este o primitivăa funcției *f*:(0, ∞) → ℝ, *f* (*x*) = $\frac{1-lnx}{x^2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe R se consideră legea de compozițiе$x \circ y = xy - x + ay + b, a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât legea "o" să fie comutativă.

5p **b)** Pentru $a = -1$,să se determine $b \in R$, știind că $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1$.

5p **c)** Pentru $a = -1, b = 2$, știind că legea "o" este asociativă, să se rezolve în ℝ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = x$.

2. Fie matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_x = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$ și mulțimea G = $\{A_x | x \in \mathbb{R}\}$.

5p **a)** Verificați dacă $I_3 \in G$

5p **b)** Demonstrați că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$ oricare ar fi numerele reale *x*,*y*.

5p **c)** Calculați P = $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{100}$

SUBIECTUL al III-lea(30 de puncte)

1. Fie functia f : ℝ → ℝ, f(x) = $\begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x + \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$;

5p **a)** Aratati ca functia f admite primitive pe ℝ,

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$,

5p c) Stiind ca $\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$, a,b,c ϵ ℝ si F: ℝ ⟶ ℝ este o primitiva a lui f demonstrati ca F(a), F(b), F(c) sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Fie funcțiile f_n: → ℝ $f_n : [1, e) \to R,\ f(x) = x \cdot \ln^n x$, unde $n \in N^*$ .Notăm $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

5p **a)** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{f_3(x)}{\ln^3 x} dx.$

5p **b)** Calculați I_1 .

5p **c)** Demonstrați că $I_{2019} \le I_{2018}$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică*
13.12.2018

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Pe mulţimea $M=[2,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{x^2+y^2-4}$, $\forall x,y\in M$, calculati $\frac{13}{5}*\sqrt{3}$.

5p **2.** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y-2, \forall x,y\in\mathbb{R}$, Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că numerele: $x\circ 2; x\circ(2x); (-3)\circ(4x)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3** Care este probabilitatea, ca alegând la întâmplare un element oarecare din mulţimea $\mathbb{Z}_{10}$, acesta să fie inversabil ?

5p **4.**Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx$.

5p **5.** Funcţia $F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$. $F(x)=x\cdot\ln x-\ln 5$ este o primitivă a funcţiei $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$. Determinaţi f.

5p **6.** Să se calculeze $\int\frac{1-cos^2x}{1-sin^2x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y=xy+i(x+y)-(1+i), \forall x,y\in\mathbb{C}$:

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x+i)(y+i)-i, \forall x,y\in\mathbb{C}$:

5p **b)** Să se arate că legea este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze : $(-2018i)\circ(-2017i)\circ\ldots\circ(-2i)\circ(-i)$.

2. Pe mulţimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ se consideră operaţia de înmulţire a matricelor.

5p **a)** Să se demonstreze că mulţimea M este parte stabilă în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii .

5p **c)** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y-2xy, \forall x,y\in\mathbb{R}$

Se consideră funcţia $f:M\to\mathbb{R}, f(A(x))=x, \forall A(x)\in M$.Demonstraţi că
$f(A(x)\cdot A(y))=f(A(x))\circ f(A(y)), \forall A(x),A(y)\in M$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x}(ax^2+4x+a), a\in\mathbb{R}^*$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f .

5p **a)** Să se determine a ,ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$.

5p **b)** Determinaţi a ştiind că funcţia F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

5p **c)** Arătaţi că pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, funcţia F are două puncte de inflexiune.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2018}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Să se arate că: $I_{n+2}+2018I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\ge 1$.

5p **c)** Ştiind că şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic - 13.12.2018*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$1 * (-3). = 1 + (-3) - 3 =$ $= -5$	2p 3p
2	$x = \hat{0} => \hat{3} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{1} => \hat{2} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{2} => \hat{1} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{3} => \hat{0} = \hat{0}$ S $=\{\hat{3}\}$	1p 1p 1p 1p 1p
3	$8 * 81 = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 81} =$ $= \sqrt{16} \cdot \sqrt{81} =$ $= 36 \in \mathbb{N}$	1p 2p 2p
4	$\int \frac{x^3}{x^2} dx + 5 \int \frac{x}{x^2} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx$ $\frac{x^2}{2} + 5ln\|x\| - 3x^{-1} + C$	2p 3p
5	$\int f(x)dx = \int (x^3 - 1)dx = \int x^3 dx - \int dx =$ $= \frac{x^4}{4} - x + C$ Dacă primitiva se anulează în 1, avem: $\frac{1^4}{4} - 1 + C = 0$ $C = \frac{3}{4}$	1p 2p 1p 1p
6	$\int_0^1 xe^x dx + 2 \int_0^1 e^x dx.$ $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ $\int_0^1 xe^x dx = 1$ Finalizare	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a	xy-3x-3y+12 = x(y-3) - 3(y-3) + 3 =	2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	= (x- 3)(y- 3) + 3	3p
1.b	xoe = eox = x pentruorice x∈ R (x- 3)(e-3) + 3 = x => e - 3 = 1 => e = 4 ∈ G	3p 2p
1.c	xo3 = 3 și 3ox = 3pentruorice x∈ R. 1o2o3o40……o100 = 3	2p 3p
2.a	$I_2 = A(x) => \begin{cases} 1 - x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ $I_2 = A(1) \in G$	3p 2p
2.b	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - xy \\ 0 & xy \end{pmatrix} \cdot =$ $= A(xy)$	4p 1p
2.c	Conform b) Geste parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor Inmultirea matricelor este asociativă Din a) avem elemental neutru Elementele simetrizabile Comutativitatea	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a	Funcţia admite primitive pe R dacă este continuă pe R. $l_s(-1) = e^0 = 1, l_d(-1) = 1, f(-1) = 1$, deci f este continuă în 1 ⇒f continuă pe R, deci admite primitive	1p 3p 1p
1.b	Pentru $x \le -1, F(x) = \int e^{x+1} dx =$ $= e^{x+1} + C$	3p 2p
1.c	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2+x)dx =$ $\int_0^1 2dx + \int_0^1 xdx =$ $2x \Big\vert_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big\vert_0^1 =$ $= \frac{5}{2}$	1p 1p 2p 1p
2.a	$f(x) = F'(x)$ $F'(x) = x^2 - 5x + 6 = f(x)$	1p 4p
2.b	$F'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ Din tabelul de semn rezultă că $F' < 0$ pe (2,3) Deci F este strict descrescătoare pe (2,3)	3p 1p 1p
2.c	$F(x) = t, \qquad F'(x)dx = dt$ $\int F(x)F'(x)dx = \int t\, dt = .$	2p 1p 2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	$=\frac{t^2}{2}=\frac{(F(x))^2}{2}$	

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ştiinţe *ale naturii - 13.12.2018*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	$x \circ x = 4 => x^2 + 10 + 16 = 0$ $x_1 = -2\,;\ x_2 = -8$	2p 3p
2	$\hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{3} + \hat{3} =$ $= \hat{1}$	3p 2p
3	$x \circ (-4) = (-4) \circ x = -4$ $x \circ (-4) = (-4) \circ x = -4$ *Finalizare*	2p 2p 1p
4	$\int 1dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$ $x + ln\left\|x + \sqrt{x^2+1}\right\| + C$	3p 2p
5	$\int_1^2 \frac{dx}{9-x^2} = -\frac{1}{6}\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|\Big\|_1^2 =$ $= \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}$	3p 2p
6	F'(x) = $(\frac{lnx}{x})' = \frac{(lnx)' \cdot x - lnx \cdot x'}{x^2}$ $= \frac{1-lnx}{x^2}$ = f(x).	3p 2p

Subiectul al II-lea30 puncte

1.a)	$(x+3)(y+3) - 3 = xy + 3x + 3y + 9 - 3$ Finalizare	3p 2p
b)	a∘b ∈ $\mathbb{Q} => (a+3)(b+3) \in \mathbb{Q}$ $(a+3), (a+3) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Finalizare	1p 2p 2p
1.c	$x \circ x \circ x = (x+3)^3 - 3$ $(x+3)[(x+3)^2 - 1] = 0 => (x+3)(x+2)(x+4) = 0$ $x \in \{-4, -3, -2\}$	1p 2p 2p
2.a)	$I_3 = A_0$	4p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	Finalizare	1p
b)	Calcul direct Finalizare	4p 1p
c)	$\mathbf{P} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{100} = A_{1+2+\cdots+100} =$ $= A_{5050}$	2p 3p

Subiectul al III-lea **30 puncte**

1.a)	$l_s(0) = 0, l_d(0) = 0, f(0) = 0, deci$ f continua in x=0 f continua pe **R** –{0} ca functii elementare, deci f continua pe **R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1}(x+\sqrt{x})dx = \left.\frac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{0} + \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right\|_{0}^{1} =$ $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$	3p 2p
c)	Fie F o primitiva a lui f $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a); \int_{b}^{c} f(x)dx = F(c) - F(b)$ F(b) - F(a) = F(c) - F(b) ; de unde 2F(b) = F(a) +F(c)	3p 2p
2.a)	$\int_{e}^{e^2} \frac{f_3(x)}{\ln^3(x)} dx = \int_{e}^{e^2} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_{e}^{e^2}$ Finalizare $\frac{e^2(e^2-1)}{2}$	3p 2p
b)	$I_1 = \int_{1}^{e} f_1(x)dx = \int_{1}^{e} x \ln x$ $\left.(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4})\right\|_{1}^{e}$ Finalizare $\frac{2e^2-1}{4}$	1p 3p 1p
c)	$\int_{1}^{e} f_{2019}(x)dx - \int_{1}^{e} f_{2018}(x)dx = \int_{1}^{e} x \ln^{2018} x\,(\ln x - 1)dx \leq 0$ Finalizare	4p 1p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică - 09.12.2016*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

1.	$\frac{13}{5} * \sqrt{3} = \sqrt{\frac{144}{25} + 5 - 4} =$ $= \sqrt{\frac{169}{25}} = \mathbf{\frac{13}{5}}$	**2p** **3p**
2.	$x\circ 2 - x + 2 - 2 = x;\ x\circ 2x = x + 2x - 2 = 3x - 2;\ -3\circ 4x = -3 + 4x - 2 = 4x - 5$ $\div\ x\circ 2; x\circ 2x; -3\circ 4x \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{x + 4x - 5}{2} \Leftrightarrow$ **Finalizare :** $x = -1$	**3p** **1p** **1p**
3.	$P = \frac{numar\ cazuri\ favorabile}{numar\ cazuri\ posibile} = \frac{\lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert}{\lvert \mathbb{Z}_{10}\rvert}$ $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}\} \Rightarrow \lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert = 4$ $\lvert \mathbb{Z}_{10}\rvert = 10$ **Finalizare :** $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	**1p** **2p** **1p** **1p**

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

4.	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} \Big\vert_0^1 =$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg 0\right) =$ **Finalizare:** $=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$	3p 1p 1p
5.	F primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in (0,\infty)$ $F'(x) = (x\ln x)' - (\ln 5)' = \ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - 0 = \ln x + 1$ **Finalizare:** $f(x) = \ln x + 1,\ \forall x \in (0,\infty)$	1p 3p 1p
6.	$\int \frac{1-cos^2x}{1-sin^2x}dx = \int \frac{1-cos^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1}{cos^2x}dx - \int 1dx =$ $tgx - x + C$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x+i)(y+i) - i = xy + ix + iy - 1 + i =$ $= xy + i(x+y) - (1+i) =$ $= x\circ y,\ \forall x,y \in \mathbb{C}$ **Finalizare**	2p 2p 1p
	b)	$(x\circ y)\circ z = (x+i)(y+i)(z+i) - i$ $x\circ(y\circ z) = (x+i)(y+i)(z+i) - i$	2p

		Finalizare: $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\square \Rightarrow$ legea „$\circ$” este asociativă.	2p 1p
	c)	$x\circ(-i) = -i, \forall x\in\square$ $(-2018i)\circ(-2017i)\circ\ldots\circ(-2i)\circ(-i) =$ $\overset{\text{"}\circ\text{"}\,asoc,\ conf\ b)}{=} \left[(-2018i)\circ(-2017i)\circ\ldots\circ(-2i)\right]\circ(-i) = x\circ(-i) = -i$ Unde $\left[(-2018i)\circ(-2017i)\circ\ldots\circ(-2i)\right] \overset{not}{=} x$	2p 3p
	a)	$A(x)\cdot A(y) = A(x+y-2xy), \forall A(x), A(y)\in M$ $x, y, 2\in\square \Rightarrow (x+y-2xy)\in\square$ $\Rightarrow A(x)\cdot A(y) = A(x+y-2xy)\in M, \forall A(x), A(y)\in M$	3p 1p 1p
2.	b)	$\exists A(e)\in M$, $a.i.\ A(x)\circ A(e) = A(e)\circ A(x) = A(x), \forall A(x)\in M$ $A(x)\circ A(e) = A(e)\circ A(x) = A(x+e-2xe), \forall A(x)\in M$ $A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y$ $A(x)\circ A(e) = A(x) \Rightarrow x+e-2xe = x, \forall x\in\square \Rightarrow e = 0\in\square$ **Finalizare:** $A(e) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M$	1p 1p 1p 1p 1p
	c)	$f\left(A(x)\cdot A(y)\right) \overset{a)}{=} f\left(A(x+y-2xy)\right) = x+y-2xy,, \forall A(x), A(y)\in M$ $f\left(A(x)\right)\circ f\left(A(y)\right) = x\circ y = x+y-2xy,, \forall A(x), A(y)\in M$ **Finalizare:** $f\left(A(x)\cdot A(y)\right) = f\left(A(x)\right)\circ f\left(A(y)\right), \forall A(x), A(y)\in M$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0).$ F primitiva lui $f \Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ $1=F'(0)=f(0)=a$ **Finalizare:** $a=1\in\mathbb{R}^*$.	2p 1p 1p 1p
	b)	F este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow F'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ Cum $e^{-x}>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow ax^2+4x+a\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow a>0, \Delta\leq 0$ $\Delta=16-4a^2\leq 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, dar $a>0$ **Finalizare:** $a\in[2,\infty)$	1p 2p 1p 1p
	c)	$F''(x)=f'(x)=e^{-x}\left[-ax^2+2(a-2)x+4-a\right]$ $F''(x)=0 \Leftrightarrow -ax^2+2(a-2)x+4-a=0;\ \Delta=16>0, \forall a\in\mathbb{R}^*$ **Finalizare:** F'' are 2 rădăcini reale distincte şi schimbă semnul de 2 ori pe $\mathbb{R}$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$, deci F are 2 puncte de inflexiune, $\forall a\in\mathbb{R}^*$	2p 2p 1p
2.	a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+2018}dx=$ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{x^2+2018}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2018\right)\Big\vert_0^1$ **Finalizare:** $I_1=\dfrac{1}{2}\left(\ln(2019)-\ln(2018)\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2019}{2018}\right)$	1p 3p 1p
	b)	$I_{n+2}+2018I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+2018}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2018}dx=$ $=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}+2018x^n}{x^2+2018}dx=\int_0^1\frac{x^n\cdot\cancel{\left(x^2+2018\right)}}{\cancel{\left(x^2+2018\right)}}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$	1p 4p

	c)	$(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} I_n = l \in \mathbb{R}$	**1p**
		$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = l$	**1p**
		Trecând la limită în relaţia de recurenţă,se obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(I_{n+2}+2018I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\Rightarrow 2019l=0\Rightarrow$	**2p**
		Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = l = 0$	**1p**

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54