Societatea de Ştiinţe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Memorialul *Ştefan Dârţu*" – ediţia a XX-a
Vatra Dornei, 8 decembrie 2018
CLASA a IV -a

Problema 1.

a. Un număr natural micşorat cu 10 este de două ori mai mare decât un al doilea număr mărit cu 4 şi de 4 ori mai mare decât un al treilea număr. Ştiind că suma celor trei numere este 62, aflaţi cele trei numere.

(Gazeta Matematică)

b. Daţi un exemplu de aşezare a numerelor naturale de la 1 la 10,inclusiv, pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie cel mult egală cu 18

Problema 2.

Bunicul lui Ionuţ are în curte găini,raţe, oi şi capre, în total 50 de capete şi 130 de picioare.

Dacă raţe sunt cu 5 mai puţine decât găini, iar oi cu 5 mai multe decât capre, aflaţi câte animale sunt de fiecare fel în curtea bunucului lui Ionuţ.

Problema 3.

Se dă următorul tablou cu numere:

1					
2	3				
4	5	6			
8	9	10	11		
16	17	18	19	20	
32	33	34	35	36	37

....

a. Completaţi tabelul cu următorul rând
b. Calculaţi suma numerelor din primele 7 rânduri ale tabloului
c. În ce rând şi pe ce loc se află numărul 2050 ? Dar 1025 ?

Timp de lucru: 2:30 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!
Succes!!!

ROMÂNIA
1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Societatea de Științe Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca" Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a V -a

Problema 1.

1. La ora de sport, cei 26 de elevi ai clasei a V-a se joacă *„Aruncă mingea"*. Regula jocului este simplă. Ei sunt așezați la întâmplare într-un cerc, apoi fiecare primește, în ordinea locului pe care îl ocupă, un număr de la 1 la 26.

Fiecărui elev i se dau 26 de mingi de ping - pong.

Pe rând, începând cu copilul cu numărul 1, fiecare elev care are un număr impar îi va arunca fiecărui coleg câte o minge, cu condiția să nu îi mai fi aruncat vreuna, sau să nu fi primit de la acesta o minge.

Jocul se termină atunci când ultimul elev a aruncat numărul maxim de mingi posibile.

a) Câte mingi a aruncat elevul cu numărul 1?

b) Câte mingi are la finalul jocului, elevul cu numărul 2? Dar cel cu numărul 18?

c) Câte mingi au fost aruncate în timpul jocului, în total?

2. Să se arate că nu se pot colora fețele unui cub folosind numai două culori, astfel încât oricare două fețe vecine să aibă două culori diferite.

Problema 2.

Determinați numerele naturale n, $\overline{abc}$ și $\overline{xyz}$ scrise în baza zece, știind că sunt satisfăcute simultan condițiile:

1. $\overline{abc}$ împărțit la $\overline{cab}$ dă câtul 3 și restul 39;

2. $\overline{abc}+n^2=\overline{xyz}$, $n\in\mathbb{N}$;

3. $\overline{xyz}$ este pătrat perfect.

Problema 3.

Victor, Ionel şi Dragoş dispută în vacanţă împreună un joc cu bile.

În prima partidă Victor pierde la Ionel şi Dragoş astfel încât aceştia îşi dublează numărul de bile ce le-a avut la începutul jocului.

În partida a doua Ionel pierde la Victor şi Dragoş, aceştia îşi triplează numărul de bile ce le-au avut dup prima partidă.

În partida a treia Dragoş pierde la Victor şi la Ionel, aceştia îşi măresc de patru ori numărul de bile ce le-a avut după partida a doua.

În partida a patra Victor câştigă la Ionel şi Dragoş, aceştia îşi înjumătăţesc mumărul de bile ce le-au avu după partida a treia.

Ştiind că după partida a treia cei trei copii aveau fiecare câte 144 de bile, aflaţi câte bile a avut fiecare copi la începutul şi, respectiv, la sfârşitul jocului.

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!

Succes!!!

Societatea de Ştiințe
Matematice din Romania

ROMÂNIA
1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Memorialul *Ştefan Dârțu*" – ediția a XX-a
Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a VI -a

Problema 1.

a) Arătați, că din 9 numere naturale prime, diferite de 2, putem alege două numere, astfel încâ produsul dintre suma și diferența lor să se dividă cu 32.

b) Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât suma cifrelor lui n şi $n + 1$ să se divid cu 5.

Problema 2.

a) Să de determine numerele naturale prime a și b știind că:

$\frac{a!}{b!}+\frac{b!}{a!}+\frac{1}{(a+b)!}-\frac{2}{(a-b)!}=1\frac{41}{120}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$; $n \in \mathbb{N}^*$ și $o! = 1$.

b) Să se arate că în produsul $\mathcal{P} = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 79! \cdot 80!$ se poate şterge unul dintre factori, $m!$, astfel încât numărul $\frac{\mathcal{P}}{m!}$ să fie pătrat perfect, unde $1 \le m \le 80$

Problema 3.

a) Desenați unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura de $11^\circ\ 30'$ și apoi unghiul $\sphericalangle BOC$ cu măsura de 10 ori mai mare decât măsura $\sphericalangle AOB$.

b) Folosind figura de la punctul a) desenați un unghi cu măsura de $8^\circ\ 7'\ 30''$ folosind numai rigla negradată și compasul. (precizați fiecare pas efectuat în realizarea desenului)

Timp de lucru: 2:30 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!
Succes!!!

Societatea de Ştiinţe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Memorialul *Ştefan Dârţu*" – ediţia a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a VII -a

Problema 1.

a) Demonstraţi inegalitatea: $\overline{acdea}\cdot\overline{bcdeb}\le\overline{acdeb}\cdot\overline{bcdea}$.

b) La **Marea Adunare** de la Alba Iulia pe **1 Decembrie 2018** au participat dintr-un judeţ al **României** delegaţi din 23 de localităţi diferite.

Fiecare delegat dintr-o localitate oarecare a judeţului cunoaşte exact câte un delegat din fiecare din celelalte 22 de localităţi.

Dacă din judeţul respectiv au participat 460 de delegaţi, determinaţi câţi delegaţi au fost din fiecare localitate.

Problema 2.

Se dau mulţimile:

$$\mathrm{A}=\left\{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\}\Big/\frac{2018n+2017}{n+2}\in\mathbb{Z}\right\} \text{ şi } \mathrm{B}=\left\{m\in\mathbb{Z}\ \Big/\frac{2017m+2018}{2m+1}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Să se determine mulţimile:

a) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$;

b) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$;

c) $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$.

Problema 3.

În exteriorul triunghiului *ABC* construim pătratele *ABMN*, *ACQP* şi paralelogramul *APTN*. Notăm $\{D\}=AT\cap BC$.

a) Arătaţi că $AT\perp BC$ şi $BP\perp NC$.

b) Dacă triunghiul *ABC* este isoscel cu $(AB)\equiv(AC)$, demonstraţi că triunghiul *DMQ* este isoscel.

Timp de lucru: 2:30 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!
Succes!!!

Societatea de Științe
Matematice din Romania

ROMÂNIA
1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a VIII -a

Problema 1.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:
$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) - 23 = y^{2018}$.

b) Dacă x și y sunt numere raționale pozitive, subunitare și diferite de $\frac{1}{2}$, să se demonstreze că numărul $z = x + y - 2xy$ este pozitiv, subunitar și diferit de $\frac{1}{2}$.

Problema 2.

Fie numerele naturale nenule x, y, z, t, m cu proprietatea $m / xy^n + zn + t$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că m / z^2.

b) Se poate afirma că m / z ? Justificați răspunsul!

Problema 3.

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și punctele E și F mijloacele muchiilor AB și, respectiv, BC ale cubului.

Să se arate că:

a) Dreptele $D'B$, $A'F$, $C'E$ și OB' sunt concurente, unde punctul O este centrul bazei $ABCD$ a cubului.

b) Dacă $AB = 8$ cm, calculați aria patrulaterului $EFC'A'$.

Timp de lucru: 2:30 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!
Succes!!!

ROMÂNIA
1918 2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Societatea de Ştiinţe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Memorialul *Ştefan Dârţu*" – ediţia a XX-a
Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a IX -a

Problema 1.

În triunghiul ascuţitunghic ABC, înscris în cercul de centru O, se notează cu E şi F picioarele înălţimilor din B şi respectiv C.

Să se arate că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle BAC)=45^{\circ}$.

Problema 2.

Să se determine numerele reale nenule y care verifică egalitatea $\left[\frac{x}{y}\right]=\left[\frac{4x}{y^2}\right]+\left[\frac{5x}{y^3}\right]$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. (Prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului real a.)

Problema 3.

Fie $a_1,a_2,\dots,a_{2019}\in\{1,-1\}$ şi suma $S=\sum\limits_{1\le i<j\le 2019} a_i\cdot a_j$. Să se determine cea mai mică valoare pozitivă care o poate lua S.

Timp de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!
Succes!!!

Societatea de Științe Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca" Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a X -a

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Numerele complexe nenule $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au module egale. Să se arate că există $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ k \neq j$ astfel încât $\left|\frac{z_k - z_j}{z_k + z_j}\right| \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Problema 2.

Fie a și b două numere reale astfel încât $1 < a \leq b$. Demonstrați că:

a) $\log_{a+1}(b+1) \leq \log_a b$;

b) $\left(1+3^{b+1}\right)^a \leq \left(1+3^{a+1}\right)^b$.

Problema 3.

Să se determine numerele reale a pentru care există funcții $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$f(f(x)) + f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{și}$$

$$f(f(x)+x) = 2f(x) + ax,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Timp de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

Societatea de Științe Matematice din Romania

ROMÂNIA
1918 2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Liceul Teoretic "Ion Luca" Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică „Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu valorile proprii $\lambda_i \neq 0, i=\overline{1,3}$.

a) Arătați că A este o matrice inversabilă și $\det\left(A+A^{-1}\right)=\prod_{i=1}^{3}\left(\lambda_i+\frac{1}{\lambda_i}\right)$.

b) Demonstrați că, dacă $tr(A)=tr\left(A^2\right)=0$, atunci $\det\left(A+A^{-1}\right)=\det(A)+\det\left(A^{-1}\right)$.

Problema 2.

Se consideră șirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin :

$$a_0=a_1=1 \text{ și } (n+1)!\cdot\left(a_{n+1}\sqrt{a_{n-1}}-a_n\sqrt{a_n}\right)=n\cdot\sqrt{a_{n-1}\cdot a_n}, \forall n\geq 1.$$

a) Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

b) Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$, dacă există.

Problema 3.

Considerăm $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin : $\frac{\sqrt[n]{n!\cdot(1+a_n)}}{n}=\frac{1}{e}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca" Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Memorialul *Ştefan Dârţu*" – ediţia a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a XII -a

Problema 1.

Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu $f(1)=0$ şi care admite o primitivă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(xy)+xy=xy\big(f(x)+f(y)\big)$ oricare ar fi $x,y\in(0,\infty)$.

Problema 2.

a) Daţi exemplu de o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux şi care nu are primitive.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Dacă funcţia f^{2018} are limită în orice punct din $\mathbb{R}$, demonstraţi că f admite primitive.

Puteţi folosi în rezolvarea problemei următorul rezultat:

Lemă. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie definită astfel $g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \lambda, & x=0\end{cases}$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$, λ fixat.

Atunci: 1° $\lambda=0\Rightarrow g$ admite primitive;

2° g are proprietatea lui Darboux $\Leftrightarrow |\lambda|\leq 1$.

Problema 3.

a) Arătaţi că ecuaţia $x^5=\hat{1}$ are cel puţin două soluţii în monoidul $(\mathbb{Z}_{11},\cdot)$.

b) Determinaţi numerele naturale n, $2\leq n\leq 40$, cu proprietatea că ecuaţia $x^5=\hat{1}$ are cel puţin două soluţii în monoidul $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$.

Timp de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!
Succes!!!

Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca" Vatra Dornei

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Memorialul *Ştefan Dârţu*" – ediţia a XX-a

Vatra Dornei, 8 decembrie 2018

CLASA a IV- a

Problema 1.

a. Un număr natural micşorat cu 10 este de două ori mai mare decât un al doilea număr mărit cu 4 și de 4 ori mai mare decât un al treilea număr. Ştiind că suma celor trei numere este 62, aflaţi cele trei numere.

(Gazeta Matematică)

b. Daţi un exemplu de aşezare a numerelor naturale de la 1 la 10, inclusiv, pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie cel mult egală cu 18

Barem de evaluare

Din oficiu .... 1 punct

a. Metoda grafică

$\square$ - primul număr ; $\bigcirc$ - al doilea număr ; $\triangle$ - al treilea număr

Avem: $\square - 10 = (\bigcirc + 4) + (\bigcirc + 4) = \triangle\ \triangle\ \triangle\ \triangle$

$\square = \bigcirc + \bigcirc + 18$

$\triangle = (\bigcirc + 4) : 2$ .... 1 punct

$(\bigcirc + \bigcirc + 18) + \bigcirc + (\bigcirc + 4) : 2 = 62 \ / \cdot 2$

$\bigcirc + \bigcirc + 18 + \bigcirc + \bigcirc + 18 + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + 4 = 124$

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

○ + ○ + ○ + ○ + ○ + ○ + ○ = 124 – 40 = 84............................... 1 punct

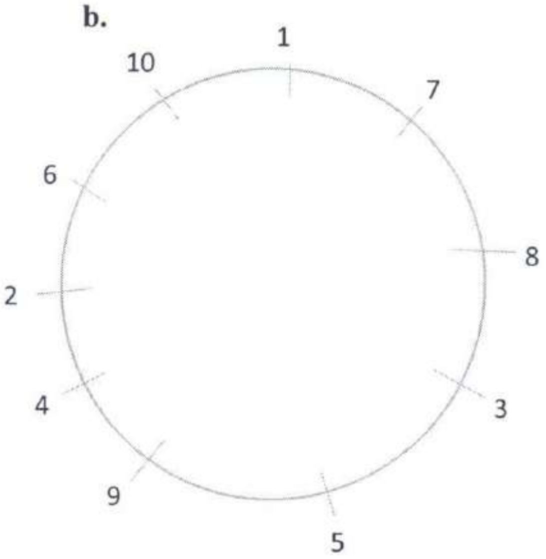
○ = 84 : 7 = 12

△ = (12 + 4) : 2 = 8

□ = 12 + 12 + 18 = 42.. 1 punct

Numerele sunt 42; 12 ; 8 ; .... 1 punct

b.



2 puncte

Problema 2.

Bunicul lui Ionuț are în curte găini,rațe, oi și capre, în total 50 de capete și 130 de picioare.

Dacă rațe sunt cu 5 mai puține decât găini, iar oi cu 5 mai multe decât capre, aflați câte animale sunt de fiecare fel în curtea bunucului lui Ionuț.

Barem de evaluare

Din oficiu .... 1 punct

Metoda falsei ipoteze

Presupunem că bunicul are numai păsări : rațe și găini.

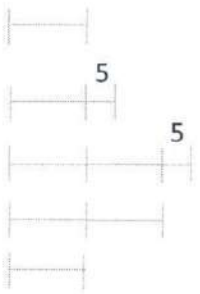
În acest caz păsările au împreună 50 · 2 = 100 picioare .... 1 punct

Lipsesc 130 – 100 = 30 picioare.Deci are și oi și capre .... 1 punct

În locuind o pasăre cu o oaie sau capră apar în plus 4 – 2 = 2 picioare

Trebuie să înlocuim 30 : 2 = 15 păsări cu oi și capre·

Bunicul are 50 – 15 = 35 de rațe și găini ....1 punct



numărul rațelor

numărul găinilor

35 păsări

35-5=30

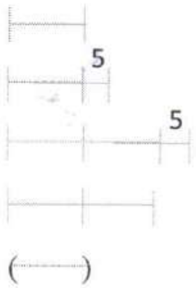
15

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

Bunicul are 15 rațe și 15 + 5 = 20 de găini.. 1 punct



Numărul caprelor

Numărul oilor

15 animale (oi și capre)

15-5=10

10:2=5

Bunicul are 5 capre și 10 oi.. 1 punct

Deci bunicul are în curte 15 rațe, 20 de găini, 5 capre și 10 oi.. 1 punct

Problema 3.

Se dă următorul tablou cu numere:

1					
2	3				
4	5	6			
8	9	10	11		
16	17	18	19	20	
32	33	34	35	36	37

....

a. Completați tabelul cu următorul rând
b. Calculați suma numerelor din primele 7 rânduri ale tabloului
c. În ce rând și pe ce loc se află numărul 2050 ? Dar 1025 ?

Barem de evaluare

Din oficiu .... 1 punct

a. Primul număr din rândul al 2 - lea este $2 \cdot 1$, din rândul al 3-lea este $2 \cdot 2 = 4$; din rândul al 4-lea este $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, din rândul al 5-lea este $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ș.a.m.d.....................1 punct
Primul număr in rândul al 7-lea este egal cu $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ și conține 7 numere consecutive , adică rândul al 7 – lea este : 64 , 65, 66, 67 , 68, 69, 70 ....1 punct
b. Suma = 825 .... 1 punct
c. Primul număr din rândul al 12-lea este egal cu $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 2}_{11 \text{ factori}} = 2048$ și acesta conține 12 numere consecutive
2050 se află pe rândul al 12 – lea și coloana a III – a pe locul
(1+2+3+... +9+10+11)+3 = 69.. 1 punct
Pe rândul al 11 – lea , primul număr este $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ factori}} = 1024$ și conține 11 numere : 1024, 1025, 1026,....1034

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

Deci 1025 se află pe rândul al 11 – lea , coloana a II-a, pe locul $(1+2+...+10)+2=57$...1 punct

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!

Succes!!!

Clasa a V-a

Subiectul I

1. La ora de sport, cei 26 de elevi ai clasei a V-a se joacă *„Aruncă mingea"*. Regula jocului este simplă. Ei sunt așezați la întâmplare într-un cerc, apoi fiecare primește, în ordinea locului pe care îl ocupă, un număr de la 1 la 26.

Fiecărui elev i se dau 26 de mingi de ping - pong.

Pe rând, începând cu copilul cu numărul 1, fiecare elev care are un număr impar îi va arunca fiecărui coleg câte o minge, cu condiția să nu îi mai fi aruncat vreuna, sau să nu fi primit de la acesta o minge.

Jocul se termină atunci când ultimul elev a aruncat numărul maxim de mingi posibile.

a) Câte mingi a aruncat elevul cu numărul 1?

b) Câte mingi are la finalul jocului, elevul cu numărul 2? Dar cel cu numărul 18?

c) Câte mingi au fost aruncate în timpul jocului, în total?

2. Să se arate că nu se pot colora fețele unui cub folosind numai două culori, astfel încât oricare două fețe vecine să aibă două culori diferite.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu . ...**(1p)**

1. a) Numărul 1 dă fiecărui elev câte o minge - (total - 25 de mingi) ....**(1p)**

b) Fiecare elev așezat pe o poziție pară primește câte o minge de la fiecare elev situat pe poziție impară, adică de la 13 elevi. Elevul cu numărul 2 cât și cel cu numărul 18 primește câte 13 mingi și au la finalul jocului câte $26 + 13 = 39$ de mingi. ....**(1p)**

c) Urmăriți tabelul următor:

Numărul jucătorilor	Numărul mingilor aruncate
1	25
3	24
5	23
7	22
9	21
11	20
13	19
15	18
17	17
19	16
21	15
23	14
25	13

................**(1p)**

În total au fost aruncate: $25 + 24 + 23 + ... + 14 + 13 = (1 + 2 + ... + 24 + 25) - (1 + 2 + 3 + + ... + 11 + 12) = (25 \cdot 26) : 2 - (12 \cdot 13) : 2 = 25 \cdot 13 - 6 \cdot 13 = 13 \cdot (25 - 6) = 13 \cdot 19 = 247$ de mingi. ....**(1p)**

2. În orice cub există trei fețe care au un vârf comun. ....**(1p)**

Trebuie minimum trei culori. ....**(1p)**

Subiectul II

Determinați numerele naturale n, $\overline{abc}$ și $\overline{xyz}$ scrise în baza zece, știind că sunt satisfăcute simultan condițiile:

1. $\overline{abc}$ împărțit la $\overline{cab}$ dă câtul 3 și restul 39;
2. $\overline{abc} + n^2 = \overline{xyz}$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $\overline{xyz}$ este pătrat perfect.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu .... (1p)

$\overline{abc} = \overline{cab} \cdot 3 + 39 \Leftrightarrow 70a + 7b = 299 \cdot c + 39 \Leftrightarrow$ .... (1p)

$\Leftrightarrow 70a + 7b = 42 \cdot 7 \cdot c + 5c + 35 + 4 \Leftrightarrow 7 \cdot (10a + b - 42c - 5) = 5c + 4.$ .... (1p)

$5c + 4$ se împarte exact la 7, deci $c = 2$ sau $c = 9$. .... (1p)

$c = 9 \Rightarrow 10a + b - 378 - 5 = 7 \Rightarrow \overline{ab} = 378 + 5 + 7$, fals .... (1p)

$c = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 91$ și $\overline{abc} = 912$. .... (1p)

Din $912 > 30^2$ și $1000 < 32^2$ rezultă că $\overline{xyz} = 31^2 = 961$ și $n = 7$. Deci $\overline{abc} = 912$ și $\overline{xyz} = 961$ iar $n = 7$. .... (1p)

Subiectul III

Victor, Ionel și Dragoș dispută în vacanță împreună un joc cu bile.

În prima partidă Victor pierde la Ionel și Dragoș astfel încât aceștia își dublează numărul de bile ce le-au avut la începutul jocului.

În partida a doua Ionel pierde la Victor și Dragoș, aceștia își triplează numărul de bile ce le-au avut după prima partidă.

În partida a treia Dragoș pierde la Victor și la Ionel, aceștia își măresc de patru ori numărul de bile ce le-au avut după partida a doua.

În partida a patra Victor câștigă la Ionel și Dragoș, aceștia își înjumătățesc mumărul de bile ce le-au avut după partida a treia.

Știind că după partida a treia cei trei copii aveau fiecare câte 144 de bile, aflați câte bile a avut fiecare copil la începutul și, respectiv, la sfârșitul jocului.

Barem de evaluare și corectură

Din oficiu .... (1p)

Să utilizăm metoda mersului invers. Prezentăm mai întâi schema jocurilor.

După partida:	Numărul de bile ale lui			
	Victor	Ionel	Dragoș	
a IV-a	288	72	72	(1p)
a III-a	144	144	144	(1p)
a II-a	36	36	360	(1p)
I	12	300	120	(1p)
inițial	222	150	60	(2p)

După partida a II-a, Victor și Ionel aveau câte 144 : 4 = 36 de bile, iar Dragoș 144 · 3 – – (36 + 36) = 360 de bile.

După prima partidă, Victor avea 36 : 3 = 12 bile, Dragoș 360 bile : 3 = 120 de bile, iar Ionel 144 · 3 – (12 + 120) = 300 de bile.

Inițial, Ionel avea 300 bile : 2 = 150 de bile, Dragoș 120 bile : 2 = 60 de bile, iar Victor 144 · · 3 – (150 + 60) = 222 de bile.

După partida a IV-a (la sfârșitul jocului), Ionel și Dragoș aveau câte 144 bile : 2 = 72 de bile, iar Victor 144 · 3 – (72 + 72) = 288 de bile.

Clasa a VI-a

Subiectul I

a) Arătați, că din 9 numere naturale prime, diferite de 2, putem alege două numere, astfel încât produsul dintre suma și diferența lor să se dividă cu 32.

b) Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât suma cifrelor lui n și $n+1$ să se dividă cu 5.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

a) Toate cele 9 numere prime sunt impare ....(1p)

Resturile împărțirii celor 9 numere la 16 sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 sau 15.

Conform **principiului cutiei** din cele 9 numere cel puțin două dintre ele a și b cu $a \geq b$ dau același rest la împărțirea cu 16, ele sunt de forma $a = 16k_1 + r$ și $b = 16k_2 + r$, unde $r < 16$, r impar și $k_1 \geq k_2$ ....(1p)

Dar $(a+b)(a-b) = [16(k_1+k_2)+2r]\cdot[16\cdot(k_1-k_2)] = \mathcal{M}_{32}$ ....(1p)

b) Fie $n = \overline{a_p a_{p-1}...a_1 \underbrace{99...99}_{k \text{ ori}}}$ și $S(x)$ suma cifrelor numărului natural x

$n+1 = \overline{a_p a_{p-1}...a_2(a_1+1)\underbrace{00...0}_{k \text{ ori}}}$. ....(1p)

$5 / S(n+1) \Rightarrow 5 / a_1 + a_2 + ... + a_p + 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_p = 5m + 4$, $m \in \mathbb{N}$.

$5 / S(n) \Rightarrow 5 / a_1 + a_2 + ... + a_p + 9k \Rightarrow 5 / 5m + 4 + 9k \Rightarrow 5 / 4k + 4 \Rightarrow 5 / 4(k+1) \Rightarrow 5 / k+1$. (1p)

k minim $\Rightarrow k = 4$ și n minim $= 49999$ ....(1p)

Subiectul II

a) Să de determine numerele naturale prime a și b știind că:

$\frac{a!}{b!} + \frac{b!}{a!} + \frac{1}{(a+b)!} - \frac{2}{(a-b)!} = 1\frac{41}{120}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$; $n \in \mathbb{N}^*$ și $o! = 1$.

b) Să se arate că în produsul $\mathcal{P} = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot ... \cdot 79! \cdot 80!$ se poate șterge unul dintre factori, $m!$, astfel încât numărul $\frac{\mathcal{P}}{m!}$ să fie pătrat perfect, unde $1 \leq m \leq 80$

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

a) Dacă $a = b$, atunci $\frac{a!}{b!} + \frac{b!}{a!} + \frac{1}{(a+b)!} - \frac{2}{(a-b)!} = 1 + 1 + \frac{1}{(a+b)!} - 2 = \frac{1}{(a+b)!} < 1$, nu convine. (1p)

Deci $a > b$. Dacă $a = 3$ și $b = 2$, atunci $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{120} - 2 = \frac{161}{120}$, soluție. ....(1p)

Dacă $a \geq 5$ și $b \geq 2$, atunci $\frac{a!}{b!} + \frac{b!}{a!} + \frac{1}{(a+b)!} > 3$, dar $\frac{161}{120} + \frac{2}{(a-b)!} < 3$, nu convine. ...(1p)

Deci $a = 3$ și $b = 2$, soluție unică ....(1p)

b) $\mathcal{P}=(1! \cdot 2!)\cdot(3! \cdot 4!)\cdot(5! \cdot 6!)\cdot\ldots\cdot(79! \cdot 80!)$ .... **(1p)**

$\mathcal{P}=\left[(1!)^2\cdot 2\right]\cdot\left[(3!)^2\cdot 4\right]\cdot\left[(5!)^2\cdot 6\right]\cdot\ldots\cdot\left[(79!)^2\cdot 80\right]$

$\mathcal{P}=(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot\ldots\cdot 79!)^2\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 78\cdot 80)$

$\mathcal{P}=(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot\ldots\cdot 79!)^2\cdot 2^{40}\cdot(40!)$

$\mathcal{P}=\left[(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot\ldots\cdot 79!)^2\cdot 2^{20}\right]^2\cdot 40!$

Trebuie să-l ștergem pe 40! .... **(1p)**

Subiectul III

a) Desenați unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura de $11^\circ\,30'$ și apoi unghiul $\sphericalangle BOC$ cu măsura de 10 ori mai mare decât măsura $\sphericalangle AOB$.

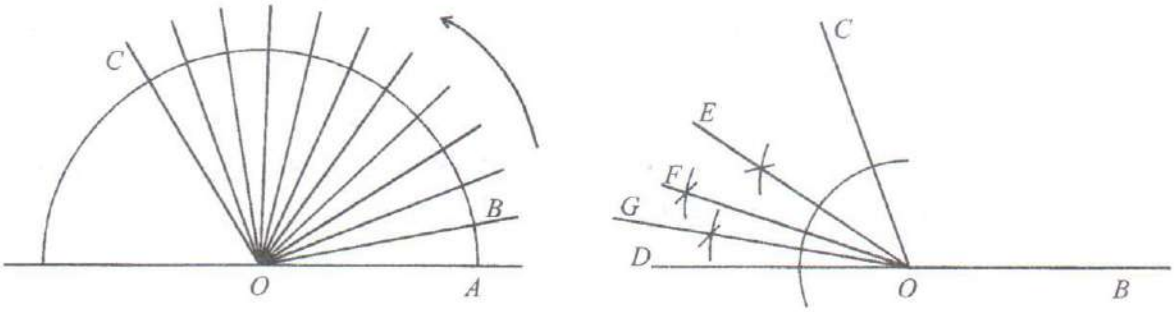
b) Folosind figura de la punctul a) desenați un unghi cu măsura de $8^\circ\,7'\,30''$ folosind numai rigla negradată și compasul. (precizați fiecare pas efectuat în realizarea desenului)

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu. .... **(1p)**

a) $m(\sphericalangle BOC)=11^\circ\,30'\cdot 10=115^\circ$ .... **(1p)**

Efectuarea desenului .... **(1p)**



b) Pasul 1. Construim semidreapta $(OD$ opusa semidreptei $(OB$.

$m(\sphericalangle COD)=180^\circ-115^\circ=65^\circ$. .... **(1p)**

Pasul 2. Construim bisectoarea $\sphericalangle COD$, semidreapta $(OE$.

$m(\sphericalangle DOE)=65^\circ:2=32^\circ\,30'$. .... **(1p)**

Pasul 3. Construim bisectoarea $\sphericalangle EOD$, semidreapta $(OF$.

$m(\sphericalangle DOF)=\dfrac{32^\circ 30'}{2}=16^\circ 15'$. .... **(1p)**

Pasul 4. Construim bisectoarea $\sphericalangle DOF$, semidreapta $(OG$.

$m(\sphericalangle DOG)=16^\circ 15':2=8^\circ\,7'\,30''$. .... **(1p)**

Clasa a VII-a

Subiectul I

a) Demonstrați inegalitatea: $\overline{acdea} \cdot \overline{bcdeb} \leq \overline{acdeb} \cdot \overline{bcdea}$.

b) La **Marea Adunare** de la Alba Iulia pe **1 Decembrie 2018** au participat dintr-un județ al **României** delegați din 23 de localități diferite.

Fiecare delegat dintr-o localitate oarecare a județului cunoaște exact câte un delegat din fiecare din celelalte 22 de localități.

Dacă din județul respectiv au participat 460 de delegați, determinați câți delegați au fost din fiecare localitate.

Barem de corectură și exaluare

Din oficiu ....(**1p**)

a) Notăm $\overline{acde} = x$ și $\overline{bcde} = y$.

Avem: $\overline{acdea} \cdot \overline{bcdeb} \leq \overline{acdeb} \cdot \overline{bcdea} \Leftrightarrow (10x+a)(10y+b) \leq (10x+b)(10y+a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)(x-y) \geq 0$, **(1)** ....(**1p**)

Dacă $a = b$ relația **(1)** este evidentă și avem chiar egalitate ....(**1p**)

Dacă $a > b$, atunci $x > y$ și relația **(1)** este adevărată.

Dacă $a < b$, atunci $x < y$ și relația **(1)** are loc. .... (**1p**)

b) Fie L_1 și L_2 două localități oarecare din județul respectiv. Este suficient să arătăm că din L_1 și L_2 participă același număr de delegați. ....(**1p**)

Prin absurd, presupunem că din L_1 participă mai mulți delegați decât din L_2.

Cum fiecare delegat fiecare delegat din L_1 cunoaște exact un delegat din L_2, atunci există cel puțin 2 delegați din L_1 să zicem, Ionel și Costel ce cunosc același delegat și anume pe Vasilică din L_2.

În acest caz delegatul Vasilică cunoaște 2 delegați din L_1 pe Ionel și Costel, în contradicție cu enunțul problemei. ....(**1p**)

În concluzie, din fiecare localitate a județului au participat același număr de delegați, și anume 460 : 23 = 20. ....(**1p**)

Subiectul II

Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \middle/ \frac{2018n+2017}{n+2} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } B = \left\{ m \in \mathbb{Z} \middle/ \frac{2017m+2018}{2m+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se determine mulțimile:

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $B \setminus A$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(**1p**)

Determinăm mulțimile A și B

$$\frac{2018n+2017}{n+2} = 2018 - \frac{2019}{n+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2019}{n+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+2/2019 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+2 \in \{-2019; -673; -3; -1; 1; 3; 673; 2019\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \{-2021; -675; -5; -3; -1; 1; 671; 2017\}$$ .... (**2p**)

$\frac{2017m+2018}{2m+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m+1/2017m+2018 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m+1/4034m+4036 \Rightarrow 2m+1/2017(2m+1)+2019 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m+1/2019 \Rightarrow 2m+1 \in \{-2019;-673;-3;-1;\ 1;\ 3;\ 673;\ 2019\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \{-1010;-337;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 336;\ 1009\}$. ....(1p)

a)
$A \cup B = \{-2021;-1010;-675;-337;-5;-3;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 336;\ 671;\ 1009;\ 2017\}$. .(**1p**)

b) $A \cap B = \{-1;\ 1\}$. ....(**1p**)

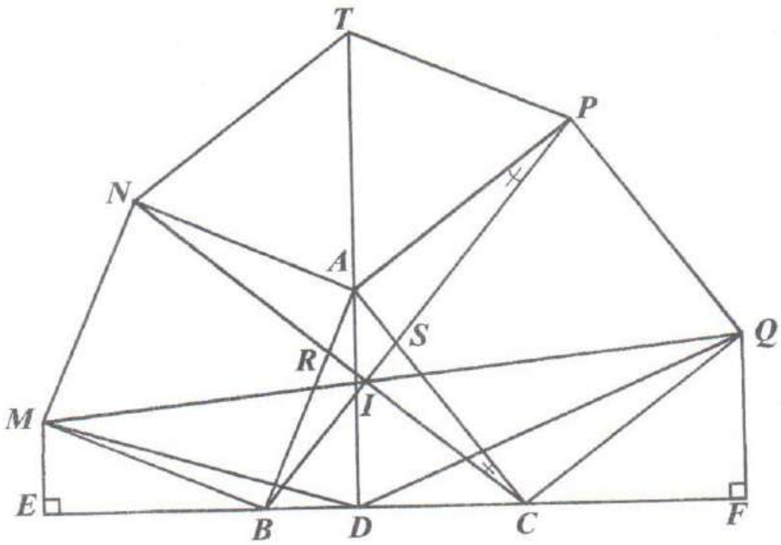
c) $B \setminus A = \{-1010;-337;-2;\ 0;\ 336;\ 1009\}$. ....(**1p**)

Subiectul III

În exteriorul triunghiului ABC construim pătratele $ABMN$, $ACQP$ și paralelogramul $APTN$. Notăm $\{D\} = AT \cap BC$.

a) Arătați că $AT \perp BC$ și $BP \perp NC$.

b) Dacă triunghiul ABC este isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$, demonstrați că triunghiul DMQ este isoscel.



Barem de corectură și evaluare

Din oficiu .... (**1p**)

a) $\left.\begin{array}{l}(AB) \equiv (PT) \\ (AC) \equiv (AP) \\ m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle APT)\end{array}\right] \overset{\textbf{(l.u.l)}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l}\triangle ABC \equiv \triangle PTA \Rightarrow m(\sphericalangle TAP) = m(\sphericalangle ACB) \\ \text{Dar } m(\sphericalangle TAP) + m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ\end{array}\right] \Rightarrow$ ..(**1p**)

$\Rightarrow m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, de unde $AT \perp BC$. ....(**1p**)

$m(\sphericalangle NAC) = 90^\circ + m(\sphericalangle BAC); m(\sphericalangle PAB) = 90^\circ + m(\sphericalangle BAC)$.

Deci $m(\sphericalangle NAC) = m(\sphericalangle PAB)$.

Cum $(NA) \equiv (AB); (AC) \equiv (AP) \Rightarrow \triangle NAC \equiv \triangle BAP \Rightarrow \sphericalangle APB \equiv \sphericalangle ACN$. ....(**1p**)

Fie $AC \cap BP = \{S\}$ și $BP \cap NC = \{I\}$.

Cum $m(\sphericalangle ASP) = m(\sphericalangle ISC)$ și $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle ACN \Rightarrow m(\sphericalangle SIC) = m(\sphericalangle PAS) = 90^\circ$, de unde $BP \perp NC$. ....(1p)

b) Fie $ME \perp BC$; $QF \perp BC$ cu $E, F \in BC$.

$\triangle ABD \equiv \triangle BME$ **(i.u)** și $\triangle ADC \equiv \triangle CFQ$ **(i.u)** $\Rightarrow (ME) \equiv (BD); (QF) \equiv (CD)$;

$(BE) \equiv (AD)$ și $(AD) \equiv (CF) \Rightarrow (BE) \equiv (CF)$. .... (1p)

Dar $(BD) \equiv (DC)$, deci $(ME) \equiv (QF)$ și $MQ \parallel BC$.

$\triangle MED \equiv \triangle QFD$ **(c.c.)** $\Rightarrow (MD) \equiv (DC)$, deci $\triangle DMQ$ este isoscel. ....(1p)

Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:
$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)-23=y^{2018}$.

b) Dacă x și y sunt numere raționale pozitive, subunitare și diferite de $\frac{1}{2}$, să se demonstreze că numărul $z=x+y-2xy$ este pozitiv, subunitar și diferit de $\frac{1}{2}$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu .... **(1p)**

a) $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)-23=y^{2018}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^2+3x)(x^2+2x+x+2)-23=y^{2018}\Leftrightarrow(x^2+3x)(x^2+3x+2)-23=y^{2018}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(a+2)+1=y^{2018}+24$, (am notat $x^2+3x=a$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1=y^{2018}+24\Leftrightarrow(a+1)^2=y^{2018}+24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[(a+1)-y^{1009}\right]\left[(a+1)+y^{1009}\right]=24$. .... **(1p)**

Dacă $a+1-y^{1009}=m$ și $a+1+y^{1009}=m$, atunci $2\cdot(a+1)=m+n$, de unde rezultă că m și n au aceași paritate.

Deci $(a+1-y^{1009})(a+1+y^{1009})=24=(-12)(-2)=(-2)(-12)=(-6)(-4)=(-4)(-6)=$
$=12\cdot2=2\cdot12=6\cdot4=4\cdot6$. .... **(1p)**

Din $a+1-y^{1009}=-12$ și $a+1+y^{1009}=-2\Rightarrow a+1=-7\Rightarrow a=-8$

$x^2+3x=-8\Leftrightarrow4x^2+12x+32=0\Leftrightarrow(2x+3)^2+23=0$, nu convine.

$a+1-y^{1009}=-2$ și $a+1+y^{1009}=-12\Rightarrow a+1=-7$, nu convine.

$a+1-y^{1009}=-4$ și $a+1+y^{1009}=-6\Rightarrow a+1=-5\Rightarrow a=-6$.

$x^2+3x=-6\Rightarrow4x^2+12x+24=0\Rightarrow(2x+3)^2+15=0$, nu convine.

$a+1-y^{1009}=2$ și $a+1+y^{1009}=12\Rightarrow a=6$ și $x^2+3x-6=0\Leftrightarrow4x^2+12x-24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2x+3)^2=33$, nu convine

$a+1-y^{1009}=4$ și $a+1+y^{1009}=6\Rightarrow a=4$ și $x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x^2-x+4x-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+4)=0\Leftrightarrow x\in\{-4;\ 1\}$. .... **(1p)**

Din ecuația dată: $x=-4\Rightarrow y\in\{-1;\ 1\}$

$x=1\Rightarrow y\in\{-1;\ 1\}$

Deci $(x,y)\in\{(1;-1);(1;\ 1);(-4;-1);(-4;\ 1)\}$. .... **(1p)**

b) $z-1=(x-1)(y-1)-xy<0\Rightarrow z<1$. .... **(1p)**

Din $x-\frac{1}{2}\neq0$ și $y-\frac{1}{2}\neq0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\neq0\Rightarrow2xy-x-y+\frac{1}{2}\neq0\Rightarrow z\neq\frac{1}{2}$.

$x+y-2xy=(x-xy)+(y-xy)=x(1-y)+y(1-x)>0$ .... **(1p)**

Subiectul II

Fie numerele naturale nenule *x, y, z, t, m* cu proprietatea $m/xy^n + zn + t$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că m/z^2.

b) Se poate afirma că m/z ? Justificați răspunsul!

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

a) $n=1 \Rightarrow m/xy+z+t$, **(1)**

$n=2 \Rightarrow m/xy^2+2z+t$, **(2)**

$n=3 \Rightarrow m/xy^3+3z+t$, **(3)** ....(1p)

Din **(1)** și **(2)** $\Rightarrow m/xy(y-1)+z$, **(4)**

Din **(2)** și **(3)** $\Rightarrow m/xy^2(y-1)+z$, **(5)**

Din **(4)** și **(5)** $\Rightarrow m/xy\cdot(y-1)^2 \Rightarrow m/x^2y^2(y-1)^2$, **(6)** ....(1p)

Din **(4)** $\Rightarrow m/[xy(y-1)+z]\cdot[xy(y-1)-z] \Rightarrow m/x^2y^2(y-1)^2-z^2$, **(7)**

Din **(6)** și **(7)** $\Rightarrow m/z^2$. ....(2p)

b) Dacă $x=1$; $y=3$; $z=2$ și $t=3$, atunci $4/3^n+2n+3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, $n=2k, k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 4/9^k+4k+3 \Rightarrow 4/\text{M}4+1+4k+3$.

$n=2k+1, k\in\mathbb{N} \Rightarrow 4/3^{2k+1}+2(2k+1)+3 \Rightarrow 4/(3^{2k+1}+1)+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4/9^k\cdot3+5 \Rightarrow 4/3(\text{M}4+1)+5 \Rightarrow 4/\text{M}4.$

Însă $m=4 \Rightarrow m/z^2$ și $4\nmid z$. ....(1p)

Deci $m\nmid z$, oricare ar fi numerele *x, y, z, t, m, n* cu proprietatea din enunț. ....(1p)

Subiectul III

Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* și punctele *E* și *F* mijloacele muchiilor *AB* și, respectiv, *BC* ale cubului.

Să se arate că:

a) Dreptele *D'B*, *A'F*, *C'E* și *OB'* sunt concurente, unde punctul *O* este centrul bazei *ABCD* a cubului.

b) Dacă *AB* = 8 cm, calculați aria patrulaterului *EFC'A'*.

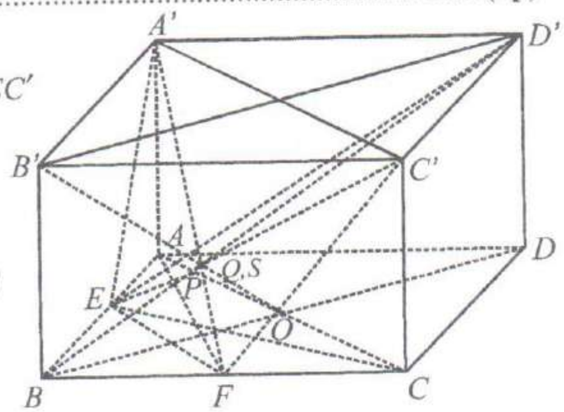
Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

a) Din $D'C' \parallel EB$ și $EB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{D'C'}{2} \Rightarrow D'B$ și EC' sunt coplanare și concurente în punctul *P*.

$\triangle BPE \sim \triangle D'PC'$ **(t·f·a)** $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{PB}{PD'} = \dfrac{\frac{C'D'}{2}}{D'C'} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{EP}{PC'}$, **(1)** ....(1p)



Din $EF \parallel AC \parallel A'C'$ și $EF = \dfrac{A'C'}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dreptele $A'F$ și EC' sunt coplanare și concurente. ....(1p)

Fie $\{Q\} = A'F \cap C'E$. Avem $\triangle QEF \sim \triangle QC'A' \Rightarrow \dfrac{QF}{QA'} = \dfrac{EQ}{QC'} = \dfrac{EF}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$, **(2)**

Din $OB \parallel B'D'$ și $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{B'D'}{2} \Rightarrow OB'$ și BD' sunt concurente și coplanare. ....(1p)

Dacă $\{S\} = OB' \cap BD' \Rightarrow \triangle SOB \sim \triangle SB'D'$ **(t·f·a)** $\Rightarrow \dfrac{BS}{SD'} = \dfrac{1}{2}$, **(3)**

Din **(1)**, **(2)** și **(3)** $\Rightarrow P = Q = S$, adică dreptele $D'B$, $A'F$, $C'E$ și OB' sunt concurente. ..(1p)

b) $EC'^2 = CC'^2 + EC^2 = CC'^2 + BC^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{9a^2}{4} = A'F^2$, deci $EC' = A'F$.

Din $EP^2 + PF^2 = EF^2 \Rightarrow A'F \perp EC'$. ....(1p)

Deci patrulaterul $EFC'A'$ este trapez isoscel ortodiagonal iar

$\mathcal{A}_{EFC'A'} = \dfrac{A'F \cdot EC'}{2} = \dfrac{9a^2}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9a^2}{8} = \dfrac{9 \cdot 8^2}{8} = 72 \text{ cm}^2$ ....(1p)

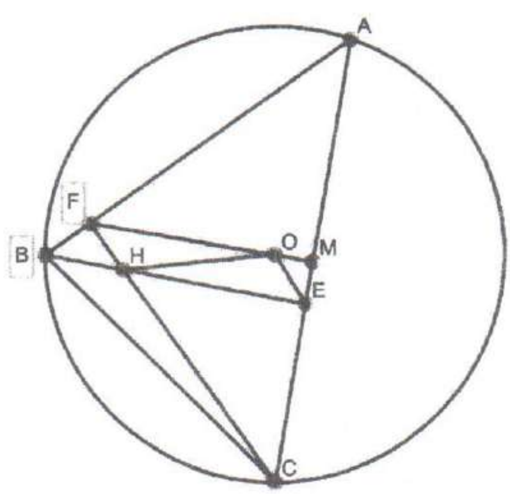
BAREM CLASA a IX-a

Problema 1.

În triunghiul ascuţitunghic ABC, înscris în cercul de centru O, se notează cu E şi F picioarele înălţimilor din B şi respectiv C. Să se arate că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$.

Soluţie: Vom nota cu H ortocentrul tiunghiului ABC şi cu M mijlocul laturii (AC). Faptul că ΔABC este ascuţitunghic ne asigură că punctele H şi O sunt situate în interiorul triungiului ABC.

Să presupunem că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$. Din relaţia lui Sylvester $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, rezultă că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ şi $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH}$, deci patrulaterul $OEHF$ este paralelogram.
Avem $OF \parallel HE$ şi $HE \perp AC$, deci $OF \perp AC$. Deoarece diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul acesteia, deducem că dreapta OF intersectează latura (AC) în mijlocul său M.
În triunghiul dreptunghic AFC, (FM) este mediană şi înălţime, prin urmare ΔAFC este isoscel, deci $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$. **(3 puncte)**



Reciproc, dacă $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$, atunci în triunghiul AFC avem $m(\sphericalangle FCA)=90^\circ-45^\circ=45^\circ$, adică $\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle FCA$, deci $(FA)\equiv(FC)$. Avem $FA=FC$, $OA=OC$ şi $MA=MC$ prin urmare punctele F, O şi M se găsesc pe mediatoarea laturii (AC).

Din $FM \perp AC$ şi $BE \perp AC$ rezultă $OF \parallel HE$. În mod similar se arată că $OE \parallel HF$, deci patrulaterul $OEHF$ este paralelogram. Avem $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OH}$, iar din relaţia lui Sylvester $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ deducem că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$. **(3 puncte)**

Problema 2.

Să se determine numerele reale nenule y care verifică egalitatea $\left[\frac{x}{y}\right]=\left[\frac{4x}{y^2}\right]+\left[\frac{5x}{y^3}\right]$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. (Prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului real a.)

Soluție: Folosind inegalitățile $a\ge[a]>a-1$ obținem:

$$\frac{x}{y}\ge\left[\frac{x}{y}\right]=\left[\frac{4x}{y^2}\right]+\left[\frac{5x}{y^3}\right]>\frac{4x}{y^2}-1+\frac{5x}{y^3}-1\ \Rightarrow\ x\left(\frac{1}{y}-\frac{4}{y^2}-\frac{5}{y^3}\right)>-2$$ **(1 punct)**

Notăm $M_y=\frac{1}{y}-\frac{4}{y^2}-\frac{5}{y^3}$ și atunci avem $x\cdot M_y>-2$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

Dacă $M_y>0$ avem $x>\frac{-2}{M_y}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, fals!

Dacă $M_y<0$ avem $x<\frac{-2}{M_y}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, fals! (Mulțimea $\mathbb{Z}$ nu este mărginită!)

Rămâne că $M_y=0$ adică $y^2-4y-5=0$, deci $y\in\{5,-1\}$. **(3 puncte)**

$y=-1$ verifică cerințele problemei deoarece $[-x]=[4x]+[-5x]$ este adevărat pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

$y=5$ nu convine deoarece $\left[\frac{x}{5}\right]=\left[\frac{4x}{25}\right]+\left[\frac{5x}{125}\right]$ este fals pentru $x=5$. **(2 puncte)**

Problema 3.

Fie $a_1,a_2,\dots,a_{2019}\in\{1,-1\}$ și suma $S=\sum_{1\le i<j\le 2019}a_i\cdot a_j$. Să se determine cea mai mică valoare pozitivă care o poate lua S.

Soluție: Avem $(a_1+a_2+\dots+a_{2019})^2=\sum_{k=1}^{2019}a_k^{\ 2}+2\cdot\sum_{1\le i<j\le 2019}a_i\cdot a_j$. Cum $a_k\in\{1,-1\}\Rightarrow a_k^{\ 2}=1$, iar din relația precedentă obținem $2S=T^2-2019$, unde $T=a_1+a_2+\dots+a_{2019}$. **(2 puncte)**

Deoarece $a_1,a_2,\dots,a_{2019}\in\{1,-1\}$ deducem că suma T este cuprinsă între -2019 și 2019 și că este întotdeauna un număr impar. Cel mai mic număr impar pentru care $T^2\ge 2019$ este $T=45$, deci $2S=45^2-2019=6$, adică $S=3$. **(3 puncte)**

Această valoare minimă pozitivă se obține pentru $a_1=a_2=\dots=a_{45}=1$, apoi alternativ -1 și 1 $(a_{46}=-1,\ a_{47}=1,\ a_{48}=-1,\ a_{49}=1,\ \dots,a_{2018}=-1,\ a_{2019}=1)$. **(1 punct)**

BAREM CLASA a X-a

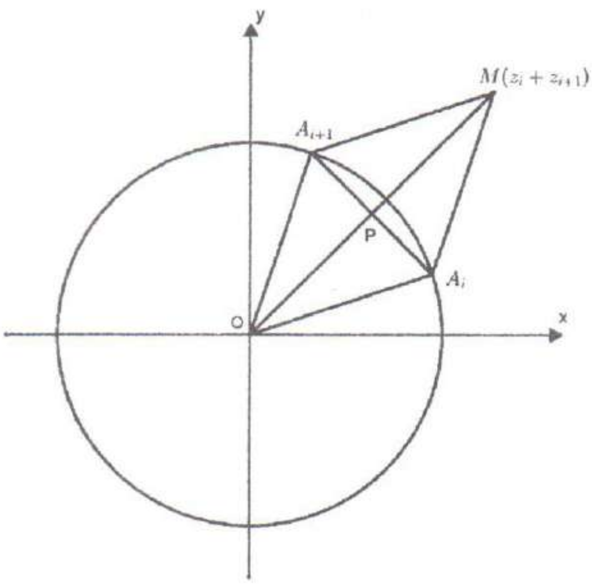
Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Numerele complexe nenule $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au module egale. Să se arate că există $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq j$ astfel încât $\left|\frac{z_k - z_j}{z_k + z_j}\right| \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Soluție: Dacă există $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq j$ astfel încât $z_j = z_k$, atunci $\left|\frac{z_k - z_j}{z_k + z_j}\right| = 0 \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt distincte două câte două, notăm cu A_i punctul de afix z_i, $i = \overline{1,n}$. Deoarece $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = r > 0$ rezultă că punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se găsesc pe cercul $C(O, r)$ și împart acest cerc în n arce cu interioarele disjuncte: $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ... $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ și $\overset{\frown}{A_nA_1}$. **(2 puncte)**

Notăm cu $\mu\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ măsura în radiani a arcului $\overset{\frown}{AB}$. Cum $\mu\left(\overset{\frown}{A_1A_2}\right) + \mu\left(\overset{\frown}{A_2A_3}\right) + \ldots + \mu\left(\overset{\frown}{A_nA_1}\right) = 2\pi$, rezultă că există un arc $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ cu $\mu\left(\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}\right) \leq \frac{2\pi}{n}$ (convenim ca $A_{n+1} = A_1$). **(2 puncte)**



Dacă M este punctul de afix $z_i + z_{i+1}$, atunci patrulaterul OA_iMA_{i+1} este paralelogram cu $OA_i = OA_{i+1} = r$, deci OA_iMA_{i+1} este romb. Fie $\{P\} = OM \cap A_iA_{i+1}$. În triunghiul dreptunghic OPA_i avem

$\operatorname{tg}(\sphericalangle POA_i) = \dfrac{PA_i}{PO} = \dfrac{2PA_i}{2PO} = \dfrac{A_iA_{i+1}}{OM} = \dfrac{|z_i - z_{i+1}|}{|z_i + z_{i+1}|} = \left|\dfrac{z_k - z_j}{z_k + z_j}\right|$; diagonalele rombului sunt și bisectoare, deci

$\mu(\sphericalangle POA_i) = \dfrac{1}{2}\mu(\sphericalangle A_iOA_{i+1}) \le \dfrac{\pi}{n}$, prin urmare $\left|\dfrac{z_k - z_j}{z_k + z_j}\right| = \operatorname{tg}(\sphericalangle POA_i) \le \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$. **(2 puncte)**

Problema 2.

Fie a și b două numere reale astfel încât $1 < a \le b$. Demonstrați că:

a) $\log_{a+1}(b+1) \le \log_a b$;

b) $\left(1+3^{b+1}\right)^a \le \left(1+3^{a+1}\right)^b$.

Soluție: **a)** Schimbând baza, inegalitatea de demonstrat devine :

$\dfrac{\lg(b+1)}{\lg(a+1)} \le \dfrac{\lg b}{\lg a} \Leftrightarrow \lg a \cdot \left(\lg b + \lg\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\right) \le \lg b \cdot \left(\lg a + \lg\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\right) \Leftrightarrow \lg a \cdot \lg\left(1+\dfrac{1}{b}\right) \le \lg b \cdot \lg\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

Ultima inegalitate se obține prin înmulțirea următoarelor două inegalități (între numere pozitive!):

$0 < \lg a \le \lg b$ și $0 < \lg\left(1+\dfrac{1}{b}\right) \le \lg\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$. **(3 puncte)**

b) Logaritmând în baza $1+3^{a+1}$ avem:

$$\left(1+3^{b+1}\right)^a \le \left(1+3^{a+1}\right)^b \Leftrightarrow \log_{1+3^{a+1}}\left(1+3^{b+1}\right) \le \frac{b}{a} \quad (*)$$

Folosind punctul a) obținem:

(1) $\log_{1+3^{a+1}}\left(1+3^{b+1}\right) \le \log_{3^{a+1}} 3^{b+1} = \dfrac{b+1}{a+1}$

Mai rămâne de arătat inegalitatea:

(2) $\dfrac{b+1}{a+1} \le \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow ab + a \le ab + b$, evident adevărată.

Din (1) și (2) rezultă că inegalitatea $(*)$ este adevărată. **(3 puncte)**

Problema 3.

Să se determine numerele reale a pentru care există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

(1) $f(f(x))+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și

(2) $f(f(x)+x)=2f(x)+ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Soluție: Vom arăta că există două valori pentru a: $a_1=2+\sqrt{5}$ și $a_2=2-\sqrt{5}$.

Din relația (1) obținem:

(3) $f\big(f(f(x))+f(x)\big)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Din relația (2), punând $x\to f(x)$ obținem:

$$f\big(f(f(x))+f(x)\big)=2f(f(x))+a\cdot f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Folosind relația (1) în membrul drept rezultă

(4) $f\big(f(f(x))+f(x)\big)=2\big(x-f(x)\big)+a\cdot f(x)=(a-2)f(x)+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Din (3) și (4) rezultă $(a-2)f(x)+2x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, iar de aici obținem

(5) $(3-a)f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Din relația (5) rezultă $a\neq 3$ și apoi $f(x)=\dfrac{2}{3-a}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **(3 puncte)**

Fie $\alpha=\dfrac{2}{3-a}$ și atunci $f(x)=\alpha x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Din relația (1) rezultă $\alpha^2x+\alpha x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci $\alpha^2+\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. Cum $\alpha=\dfrac{2}{3-a}$ implică $a=3-\dfrac{2}{\alpha}$, rezultă imediat că $a\in\left\{2+\sqrt{5},\,2-\sqrt{5}\right\}$. **(2 puncte)**

Se verifică prin calcul că ambele valori satisfac cerințele problemei. **(1 punct)**

Societatea de Științe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică
„Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XX-a
Vatra Dornei, 8 decembrie 2018
CLASA a XI-a

SOLUȚII

Problema 1.

Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu valorile proprii $\lambda_i \neq 0, i = \overline{1,3}$.

a) Arătați că A este o matrice inversabilă și $\det(A + A^{-1}) = \prod_{i=1}^{3}\left(\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}\right)$.

b) Demonstrați că, dacă $tr(A) = tr(A^2) = 0$, atunci $\det(A + A^{-1}) = \det(A) + \det(A^{-1})$.

Soluție.

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă și A^{-1} are valorile proprii $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ **1p**

Avem $A + A^{-1} = A^{-1}(A^2 + I_3) \Rightarrow \det(A + A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A^2 + I_3)$, iar valorile proprii ale matricei $A^2 + I_3$ sunt $\lambda_i^2 + 1, i = \overline{1,3}$ **1p**

Așadar $\det(A + A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \cdot (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)(\lambda_3^2 + 1) = \prod_{i=1}^{3}\left(\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}\right)$ **1p**

b) Polinomul caracteristic al matricei A este :

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = X^3 - (trA)X^2 + (trA^*)X - \det(A) \text{ ....} \mathbf{1p}$$

Din $trA = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, iar din $trA^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$, de unde obținem $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$ și $P_A(X) = X^3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ **1p**

Din $\lambda_1^3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3$ și analoagele........**1p**

Conform punctului a), deducem că $\det(A + A^{-1}) = \prod_{i=1}^{3}\left(\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}\right) = \ldots = \det A + \det A^{-1}$ **1p**

Timp de lucru: 2:30 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moș Crăciun"!
Succes!!!

Problema 2.

Se consideră şirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin :

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ şi } (n+1)!\cdot\left(a_{n+1}\sqrt{a_{n-1}} - a_n\sqrt{a_n}\right) = n\cdot\sqrt{a_{n-1}\cdot a_n}, \forall n\geq 1.$$

a) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dacă există.

__Soluţie.__

a) Relaţia de recurenţă este echivalentă cu $\dfrac{a_{n+1}\sqrt{a_{n-1}} - a_n\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}a_n}} = \dfrac{n}{(n+1)!} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{a_n}} - \dfrac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}}} = \dfrac{n}{(n+1)!}$ (1)....................................**1p**

Notăm $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$ şi (1) devine : $x_n - x_{n-1} = \dfrac{n}{(n+1)!}, \forall n\geq 1$, iar $x_0 = 1$ (2)

Prelucrând (2) obţinem : $x_n = 2 - \dfrac{1}{(n+1)!}, \forall n\geq 0$ (3)..**1p**

Cu (3) în $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$ obţinem : $a_{n+1} = \left[2 - \dfrac{1}{(n+1)!}\right]\cdot\sqrt{a_n}, \forall n\geq 0$ (4) **1p**

Avem : $a_0 = a_1 = 1 < a_2 = \dfrac{3}{2} < a_3 = \dfrac{11}{6}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ şi inductiv rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător (5)..**1p**

Pe de altă parte $a_{n+1} < x_n\sqrt{a_n} \overset{(5)}{<} x_n\sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} < x_n\sqrt{a_{n+1}}$, de unde $a_n \in [1,4)$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit (6)..**1p**

b) Din (5) şi (6) rezultă că şirul este convergent : $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l, l\in[1,4]$..................................**1p**

Trecând la limită în (4) obţinem $l = 2$ **1p**

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!

Succes!!!

Problema 3.

Considerăm $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale definit prin : $\dfrac{\sqrt[n]{n!\cdot(1+a_n)}}{n}=\dfrac{1}{e}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>Soluţie.</u>

Ridicăm la puterea a n-a şi obţinem : $1+a_n=\dfrac{n^n\cdot e^{-n}}{n!}$ 1p

Notăm $b_n=1+a_n$ şi calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot e^{-1}=1$ 1p

Prin urmare nu putem aplica criteriul raportului cu limită 1p

Folosim limita lui Stirling : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}}=1$ 1p

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}}{n!}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}=1\cdot 0=0$ 2p

Aşadar obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-1$ ....1p.

Timp de lucru: 2:30 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. Un punct este de la ... "Moş Crăciun"!

Succes!!!

BAREM CLASA a XII-a

Problema 1.

Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu $f(1)=0$ şi care admite o primitivă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(xy)+xy=xy\big(f(x)+f(y)\big)$ oricare ar fi $x,y\in(0,\infty)$.

Soluţie: Pentru $y=1$ relaţia din enunţ devine $F(x)+x=x\big(f(x)+f(1)\big)$, $\forall x\in(0,\infty)$ sau, echivalent, $xf(x)-F(x)=x$, $\forall x\in(0,\infty)$. Împirţind prin x^2 obţinem $\dfrac{xf(x)-F(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in(0,\infty)$ de unde rezultă $\left(\dfrac{F(x)}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in(0,\infty)$. **(2 puncte)**

Deoarece $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, deducem că există o constantă reală k astfel încât $\dfrac{F(x)}{x}=\ln x+k$, $\forall x\in(0,\infty)$, adică $F(x)=x\ln x+kx$, $\forall x\in(0,\infty)$. Prin derivare obţinem $f(x)=F'(x)=\ln x+1+k$, $\forall x\in(0,\infty)$, iar din $f(1)=0$ rezultă $k=-1$.
Prin urmare am obţinut că $f(x)=\ln x$, $\forall x\in(0,\infty)$. **(2 puncte)**

Rămâne de verificat că această funcţie satisface condiţiile problemei. Într-adevăr, funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ verifică condiţia $f(1)=0$ şi admite primitiva $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ cu proprietatea că oricare ar fi $x,y\in(0,\infty)$ are loc egalitatea
$F(xy)+xy=xy\ln xy-xy+xy=xy(\ln x+\ln y)=xy\big(f(x)+f(y)\big)$. **(2 puncte)**

Problema 2.

a) Daţi exemplu de o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux şi care nu are primitive.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Dacă funcţia f^{2018} are limită în orice punct din $\mathbb{R}$, demonstraţi că f admite primitive.

Puteţi folosi în rezolvarea problemei următorul rezultat:

Lemă. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie definită astfel $g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \lambda, & x=0\end{cases}$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$, λ fixat.

Atunci: 1° $\lambda=0\Rightarrow g$ admite primitive;

2° g are proprietatea lui Darboux $\Leftrightarrow |\lambda|\le 1$.

Soluție: **a)** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

Conform lemei (2), funcția f are proprietatea lui Darboux. **(1 punct)**

Avem $f(x)=g(x)+h(x)$, unde $g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ și $h(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

Punctul 1 din lemă ne asigură că funcția g admite primitive. Dacă și funcția f are primitive, cum $h(x)=f(x)-g(x)$, deducem că funcția h are primitive (diferență de funcții ce admit primitive); atunci h are proprietatea lui Darboux, deci transformă intervale în intervale. Dar $h(\mathbb{R})=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$ nu este interval, contradicție! Rezultă că f nu admite primitive. **(1 punct)**

b) Fie $a\in\mathbb{R}$. Deoarece funcția f are proprietatea lui Darboux, rezultă că există un șir strict crescător $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n \nearrow a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2018}(a_n)=f^{2018}(a)$ și cum f^{2018} are limită în a, deducem că $\lim\limits_{x\to a} f^{2018}(x)=f^{2018}(a)$, adică funcția f^{2018} este continuă în a.

Cum a a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}$, rezultă că funcția f^{2018} este continuă pe $\mathbb{R}$. **(2 puncte)**

Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Vom demonstra că funcția f este continuă în x_0. Distingem două cazuri:

i) Dacă $f(x_0)\neq 0$, atunci $f^{2018}(x_0)>0$; deoarece funcția f^{2018} este continuă, rezultă că există un interval $I=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ așa încât $f^{2018}(x)>0$, $\forall x\in I$, iar de aici deducem că $f(x)\neq 0$, $\forall x\in I$. Cum funcția f are proprietatea lui Darboux, rezultă că f păstrează semn constant pe I (și anume semnul lui $f(x_0)$). Dacă $f(x_0)>0$ avem $f(x)=\sqrt[2018]{f^{2018}(x)}$, $\forall x\in I$, iar dacă $f(x_0)<0$ avem $f(x)=-\left(\sqrt[2018]{f^{2018}(x)}\right)$, $\forall x\in I$. În ambele situații funcția f este compusa unor funcții continue pe I, prin urmare f este continuă pe I. Evident $x_0\in I$, deci f este continuă în punctul x_0.

ii) Dacă $f(x_0)=0$, atunci pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n\to x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2018}(x_n)=f^{2018}(x_0)=0$. Dar $f^{2018}(x_n)\to 0$ implică $f(x_n)\to 0=f(x_0)$, adică funcția f este continuă în punctul x_0.

Cum x_0 a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}$, rezultă că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare funcția f admite primitive. **(2 puncte)**

Problema 3.

a) Arătaţi că ecuaţia $x^5=\hat{1}$ are cel puţin două soluţii în monoidul $(\mathbb{Z}_{11},\cdot)$.

b) Determinaţi numerele naturale n, $2\le n\le 40$, cu proprietatea că ecuaţia $x^5=\hat{1}$ are cel puţin două soluţii în monoidul $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$.

Soluţie: **a)** Vom arăta că $\hat{1}$ şi $\hat{4}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $x^5=\hat{1}$ în monoidul $(\mathbb{Z}_{11},\cdot)$.

Evident $\hat{1}^5=\hat{1}$. Cum $2^{10}=1024=11\cdot 93+1$ rezultă că $2^{10}\equiv 1(\bmod 11)$ şi atunci $\hat{4}^5=\hat{1}$. **(1 punct)**

b) Evident $\hat{1}$ este soluţie a ecuaţiei $x^5=\hat{1}$ în monoidul $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$.

Dacă $\hat{b}^5=\hat{1}$ rezultă că $\hat{b}$ este element inversabil în monoidul $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$. **(1 punct)**

Fie $U(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ grupul elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_n$. Se ştie că $U(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ are $\varphi(n)$ elemente, unde $\varphi(n)$ este funcţia indicatoare a lui Euler. Dacă descompunerea în factori primi a lui n este $n=p_1^{i_1}\cdot p_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{i_k}$, atunci $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ sau

(1) $\varphi(n)=p_1^{i_1-1}\cdot p_2^{i_2-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{i_k-1}\cdot(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1)$.

Ecuaţia $x^5=\hat{1}$ are cel puţin două soluţii în monoidul $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ dacă şi numai dacă există $\hat{b}\in\mathbb{Z}_n\setminus\{\hat{1}\}$ astfel încât $\hat{b}^5=\hat{1}$, adică există măcar un element de ordin 5 în grupul $U(\mathbb{Z}_n,\cdot)$, ceea ce este echivalent cu $5/\varphi(n)$ (am ţinut cont de teorema lui Cauchy şi de faptul că ordinul unui element divide ordinul grupului). **(2 puncte)**

Analizăm două cazuri: 25 divide n şi 25 nu divide n.

i) Dacă 25 divide n atunci din relaţia (1) rezultă că $5/\varphi(n)$. Cum $2\le n\le 40$ obţinem că doar $n=25$ convine problemei.

ii) Dacă 25 nu divide n, pentru ca $5/\varphi(n)$ este necesr şi suficient ca n să conţină în descompunerea sa un factor prim p cu proprietatea $10/(p-1)$, deci $p\in\{11,31\}$.

Pentru $p=11$ se obţin numerele $n\in\{11,22,33\}$, iar pentru $p=31$ se obţine $n=31$.

În concluzie, numerele căutate sunt $n\in\{11,22,25,31,33\}$. **(2 puncte)**