

**Subiectul I (30 de puncte)**

1. Fie  $a = \log_2 3$ . Calculați în funcție de  $a$  logaritmul:  $\log_{12} 16$ .
2. Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbf{R}$  graficul funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (m+2)x^2 + (2m-1)x + m+3$  este tangent axei  $OX$ ?
3. Determinați  $z \in \mathbf{C}$ , dacă  $z + 3i = 6\bar{z}$ .
4. Se alege la întâmplare o funcție  $f: \{3, 6, 12, 90\} \rightarrow \{4, 14, 77, 2018\}$ . Care este probabilitatea ca aceasta să fie bijectivă?
5. Fie  $a \in \mathbf{N}$  și vectorii  $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{u} = a\vec{i} - 2\vec{j}$ . Aflați astfel încât unghiul dintre cei doi vectori să fie obtuz.
6. Rezolvați în  $\mathbf{R}$  ecuația:  $\cos 5x = \cos 2x$ .

**Subiectul II (30 de puncte)**

1. Fie permutările  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha, \beta \in S_4$ .
  - a) Calculați:  $\alpha\beta$  și  $\beta\alpha$
  - b) Calculați:  $\alpha^{2018}$
  - c) Rezolvați ecuația:  $\alpha x \alpha = \beta$ ,  $x \in S_4$
2. Pe  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = 3xy - 6(x+y) + 14$ ,  $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$ .
  - a) Demonstrați că  $G = [2, +\infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție " $*$ ".
  - b) Demonstrați că " $*$ " este asociativă pe  $\mathbf{R}$ .
  - c) Calculați expresia  $E = 1 * 2 * \dots * 2018$

**Subiectul III (30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 2$ .
  - a) Calculați  $f'(2)$ .
  - b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)-2}{f(x+1)-2} \right)^x$ .
  - c) Demonstrați că ecuația  $f'(x) = 0$  are exact două rădăcini reale.
2.
  - a) Calculați  $I = \int e^{2x} \sin x \, dx$ ,  $x \in \mathbf{R}$  și  $J = \int \frac{2x+1}{x^2+1} \, dx$ ,  $x \in \mathbf{R}$
  - b) Fie  $F$  o primitivă a funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ . Studiați convexitatea lui  $F$ .
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$ , unde  $F$  este primitivă de la subpunctul b.