**SĂ DESCOPERIM FRUMUSEŢEA MATEMATICII**

Prof. Rotariu Anişoara

Liceul „Regina Maria”, Dorohoi

 Acest material se adresează în principal profesorilor de matematică, studenţilor la facultatea de matematică, precum şi elevilor din clasele a XI a şi a XII a de liceu, pentru pregătirea examenului de bacalaureat.

 În cele ce urmează, în încercarea de a ne situa deasupra aridităţii uzuale a matematicii, prezentăm într-un mod interesant o problemă, deşirând firul logic al mai multor soluţii, motivând fiecare raţionament, cu speranţa că veţi descoperi frumuseţea ascunsă a matematicii.

**STUDIUL INEGALITĂŢILOR**

 Să se demonstreze următoarea inegalitate: $e^{x}\geq 1+ln\left(1+x\right), \left(∀\right) x> -1.$

**Soluţia 1.**

 Fie f : ( -1; ∞) →$R$, f(x)=$e^{x}-1-ln\left(1+x\right)$. Evident, f este derivabilă şi avem:

$f'\left(x\right)= e^{x}-\frac{1}{1+x } $. Din figură se observă că: $e^{x}<\frac{1}{1+x} $, dacă x $\in $(-1;0) şi $e^{x}>\frac{1}{1+x} $, dacă x$\in $(0;∞).

y = ex

0

Y

X

-1

$y=\frac{1}{1+x}$

Obţinem tabelul:

|  |  |
| --- | --- |
| x |  -1 0 +∞  |
| $$f'(x)$$ |  |- - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +  |
| $$f(x)$$ |  | 0 |

 Rezultă că $f\left(x\right)\geq f\left(0\right), \left(∀\right) x \in \left(-1; +\infty \right).$

**Soluţia 2.**

 Considerăm că funcţia f : (-1; +∞) $\rightarrow R$, $f\left(x\right)=e^{x}-1-ln\left(1+x\right)$.

Derivata sa este $ f'(x)=e^{x}-\frac{1}{1+x} , x>-1.$

 Pentru a stabili semnul acesteia trebuie să rezolvăm ecuaţia $f'\left(x\right)=0, $ceea ce este dificil de făcut. De aceea, procedăm cu $f'$ cum am procedat mai sus cu f. Adică, calculăm f’’ care este dată de

 $f''\left(x\right)=e^{x}+\frac{1}{\left(1+x\right)^{2}}$ şi observăm că $f''\left(x\right)>0, \left(∀\right) x>-1.$

Din tabloul

|  |  |
| --- | --- |
| x | -1 +∞ |
| $$f''(x)$$ | |+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + + + + + |
| $$f'\left(x\right)$$ | | -∞ +∞ |

deducem că $f'$ are exact o rădăcină x1 şi

 $f^{'}(x)<0 pentru x\in \left(-\infty , x\_{1}\right), f'\left(x\right)>0 pentru x\in \left(x\_{1}, +\infty \right).$

 Pe de altă parte, se observă că zero este rădăcina funcţiei $f'$. Acum suntem în măsură să alcătuim tabloul:

|  |  |
| --- | --- |
| x | -1 0 +∞ |
| $$f''(x)$$ | | - - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + |
| $$f'\left(x\right)$$ | | 0 |

 Aşadar $f\left(x\right)\geq 0, \left(∀\right) x\in \left(-1,+\infty \right).$

**Soluţie 3.**

 Fie $x>-1, x\ne 0$ şi I intervalul deschis cu extremităţile 0 şi x. Considerăm funcţiile $f,g:I\rightarrow R, f\left(t\right)=e^{t}, g\left(t\right)=ln\left(1+t\right). $Ipotezele teoremei lui Chauchy fiind îndeplinite rezultă că există un punct c din interiorul intervalului I ,astefel încât

$\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{g\left(x\right)-g\left(0\right)}=\frac{f^{'}\left(c\right)}{g^{'}\left(c\right)} $ adică $\frac{e^{x}-1}{ln\left(1+x\right)}=\frac{e^{x}}{\frac{1}{1+c}}=\left(1+c\right)e^{c}.$

Dacă $x>0,$ atunci $c>0$, deci 1+c > 1, $e^{c}>1,$ de unde $\left(1+c\right)e^{c}>1,$ din care $\frac{e^{x}-1}{ln\left(1+x\right)}>1.$ Deoarece $ln\left(1+x\right)>0,$ rezultă că $e^{x}>1+ln\left(1+x\right).$

Dacă $x<0,$ atunci $x<c<0$, deci 0 < 1 + c < 1, $e^{c}<1$ şi deci $0<\left(1+c\right)e^{c}<1.$ Aşadar

$\frac{e^{x}-1}{ln\left(1+x\right)}<1.$ Deoarece $ln\left(1+x\right)<0,$ rezultă că $e^{x}>1+ln\left(1+x\right).$

Dacă x = 0, atunci inegalitatea se verifică (devine egalitate).

Deci $e^{x}\geq 1+ln\left(1+x\right), \left(∀\right)x>-1.$

**Soluţie 4.**

 Considerăm funcţia $f:\left(-1; +\infty \right)\rightarrow R, f\left(x\right)=e^{x}-1-ln\left(1+x\right).$

Derivata sa este $f'\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{1+x}, x>-1.$

Vom aplica funcţiei f teorema lui Lagrange pe un interval de extremităţi 0 şi x, cu $x\in \left(-1; +\infty \right)$. Rezultă că există un punct c între 0 şi x astfel încât

 $\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=f'\left(c\right) ⇔\frac{e^{x}-1-ln\left(1+x\right)}{x} = e^{c}-\frac{1}{1+c}. (1)$

Dacă $0<c<x$ avem $e^{c}>1 şi 1+c>1$ de unde $e^{c}-\frac{1}{1+c}>0 \left(2\right).$ Din (1) şi (2) şi cum $x>0$ obţinem $e^{x}-1-ln\left(1+x\right)>0.$

Dacă $x<c<0$ avem $e^{c}<1 şi 1+c<1$ de unde $e^{c}-\frac{1}{1+c}<0 \left(3\right).$ Din (1) şi (3) şi cum $x<0$ obţinem $e^{x}-1-ln\left(1+x\right)>0.$

Dacă x = 0, atunci inegalitatea se verifică (devine egalitate).

Deci $e^{x}\geq 1+ln\left(1+x\right), \left(∀\right)x>-1.$

**Soluţia 5.**

 Fie funcţia $f:\left(-1; +\infty \right)\rightarrow R, f\left(x\right)=e^{x}-ln\left(1+x\right).$ Evident, f este derivabilă pe $\left(-1; +\infty \right)$. Derivata sa este $f'\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{1+x}, x>-1,$ iar derivata a doua $f''\left(x\right)=e^{x}+\frac{1}{\left(1+x\right)^{2}}$ .

Întrucât $f''\left(x\right)>0, \left(∀\right) x\in \left(-1,+\infty \right),$ atunci graficul lui f se află deasupra tangentei în orice punct.(1)

Ecuaţia tangentei în punctul $ \left(x\_{0},f\left(x\_{0}\right)\right)$ este $y=f\left(x\_{0}\right)+f'\left(x\_{0}\right) \left(x-x\_{0}\right) \left(2\right).$

Din (1) şi (2) rezultă că $f\left(x\right)\geq f\left(x\_{0}\right)+f'\left(x\_{0}\right) \left(x-x\_{0}\right).$ În particular, pentru $x\_{0}=0$ obţinem: $f\left(x\right)\geq 1, \left(∀\right) x \in (-1, +\infty )$ şi cu aceasta inegalitatea este demonstrată.

**Bibliografie**

* M. Ganga, Elemente de analiză matematică, Editura Mathpres, 1997
* Gh. Sireţchi, Calcul diferenţial şi integral, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică Bucureşti, 1995
* B. Demidovich, Problems in mathematical analysis, Moscova, 1976
* Colecţia “Gazeta matematicii”