Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(1,3)$ și $C(1,5)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
5p	**c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p	**b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\le 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$, $\left\|2-\sqrt{2}\right\|=2-\sqrt{2}$	**2p**
	$n=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$11-x\ge 1-11x \Leftrightarrow 10x\ge -10$	**3p**
	$x\in[-1,+\infty)$	**2p**
3.	$(3\cdot 2)^x\cdot 2=72 \Leftrightarrow 6^x=36$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$AB=4$, $BC=2$	**2p**
	ΔABC este dreptunghic în B, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{2\cdot 4}{2}=4$	**3p**
6.	$A=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\dfrac{BC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&y-2+x-2&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-2}\cdot e^{y-2}\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y-4&0\\0&1&0\\0&0&e^{x+y-4}\end{pmatrix}=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(1+2+\ldots+10-2\cdot 9)=A\left(m^2+m+17\right)\Leftrightarrow m^2+m-20=0$	**3p**
	$m=-5$ sau $m=4$	**2p**
2.a)	$f(1)=a+2$	**2p**
	$f(-1)=a-10\Rightarrow f(1)-f(-1)=a+2-a+10=12$	**3p**

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2 \Leftrightarrow f(2)=0$	**2p**
	$f(2)=a+2$, deci $a=-2$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$	**2p**
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1+x_2+x_3=4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a=-2$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=-\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$2-\ln a=0 \Leftrightarrow a=e^2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,e^2)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,e^2)$	**2p**
	$0<2<3<e^2 \Rightarrow f(2)<f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2<\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 \Rightarrow \sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(4x-x^2\right)dx=\left.\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=18-9=9$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2-x}{f(x)}dx=\int_1^2\frac{2-x}{4x-x^2}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(4x-x^2\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_{n+1}-4I_n=\int_0^4 f^{n+1}(x)dx-4\int_0^4 f^n(x)dx=\int_0^4 f^n(x)\left(4x-x^2-4\right)dx=-\int_0^4 f^n(x)(x-2)^2\,dx$	**3p**
	$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,4] \Rightarrow f^n(x)(x-2)^2\geq 0$, deci $I_{n+1}-4I_n\leq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**