Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinaţi numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=\sqrt{3}\left(3-1\right)-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f\left(1\right)=g\left(1\right)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\frac{1}{4}$	**2p**
	Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	**3p**
6.	$\sin\left(\pi-x\right)\cos\left(2\pi+x\right)-\sin\left(2\pi+x\right)\cos\left(\pi-x\right)=\sin x\cos x-\sin x\left(-\cos x\right)=$	**3p**
	$=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M\left(1\right)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(M\left(1\right)\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\left(-2\right)\cdot 3-3\cdot\left(-2\right)=$	**3p**
	$=-6+6=0$	**2p**
b)	$M\left(x\right)-M\left(2018\right)=\left(I_2+xA\right)-\left(I_2+2018A\right)=I_2+xA-I_2-2018A=$	**2p**
	$=\left(I_2+\left(-2018\right)A\right)-\left(I_2+\left(-x\right)A\right)=M\left(-2018\right)-M\left(-x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$\left(I_2+mA\right)\left(I_2+nA\right)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow\left(m,n\right)=\left(1,1\right)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$	**3p**
	$=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$	**3p**
	$x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	**2p**

c)	$f(x\circ y)=8(8xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$f(x\circ y\circ z)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=\dfrac{1}{3}$, $f'(0)=\dfrac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**3p**
	$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3 \dfrac{x\,f(x)}{e^x}dx=\int_0^3 \dfrac{x^2e^x}{e^x}dx=\int_0^3 x^2\,dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x$, $F''(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^n \|f(x)\|dx=\int_0^n xe^x\,dx=\left.(x-1)e^x\right\|_0^n=(n-1)e^n+1$	**3p**
	$(n-1)e^n+1=1\Leftrightarrow n=1$	**2p**