EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
18 iulie 2018
Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.**

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+m^2-4$, unde m este număr real.

7p **a)** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(2,-4)$ aparține graficului funcției f.

8p **b)** Determinaţi numerele reale m, pentru care $|x_1x_2-2x_1-2x_2|=m$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x)=0$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$ cu aria de $900\,\text{cm}^2$. Se consideră punctul M, mijlocul laturii CD și se notează cu E și F punctele de intersecție a cercului înscris în pătrat cu (AM), respectiv (BM).

7p **a)** Calculați perimetrul triunghiului AMB.

8p **b)** Demonstrați că $EF=24\,\text{cm}$.

3. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$.

7p **a)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

8p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }1024\text{ ori}}=x^2+6x+14$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\operatorname{arctg}x$.

7p **a)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

8p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{3\pi+2}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvenţă face parte din programa şcolară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competenţe specifice	**Conţinuturi**
1. ***Identificarea*** *unor elemente ale figurilor geometrice plane în configuraţii geometrice spaţiale date* 2. ***Calcularea*** *ariilor şi volumelor corpurilor geometrice studiate* 3. ***Clasificarea*** *corpurilor geometrice după anumite criterii date sau alese* 4. ***Exprimarea*** *proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice în limbaj matematic (axiomă, teoremă directă, teoremă reciprocă, ipoteză, concluzie, demonstraţie)* 5. ***Analizarea*** *şi* ***interpretarea*** *condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică să verifice anumite cerinţe* 6. ***Transpunerea*** *unor situaţii-problemă în limbaj geometric,* ***rezolvarea*** *problemei obţinute şi* ***interpretarea*** *rezultatului*	***Calcularea de arii şi volume*** • *Paralelipipedul dreptunghic, cubul: descriere, desfăşurare, aria laterală, aria totală şi volum* • *Prisma dreaptă cu baza: triunghi echilateral, pătrat, dreptunghi, hexagon regulat: descriere, desfăşurare, aria laterală, aria totală şi volum* • *Piramida triunghiulară regulată, tetraedrul regulat, piramida patrulateră regulată, piramida hexagonală regulată: descriere, desfăşurare, aria laterală, aria totală şi volum* • *Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată, trunchiul de piramidă patrulateră regulată: descriere, desfăşurare, aria laterală, aria totală, volum* • *Cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept: descriere, desfăşurare, secţiuni paralele cu baza şi secţiuni axiale; aria laterală, aria totală şi volumul* • *Sfera: descriere, aria, volumul*

(Programa şcolară de matematică, OMECI nr. 5097/09.09.2009)

Pentru evaluarea a trei dintre competenţele specifice precizate în secvenţa de mai sus, elaboraţi trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* şi un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenţelor specifice alese;
- răspunsul aşteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaboraţi;
- corectitudinea științifică a informaţiei de specialitate.

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
18 iulie 2018
Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 2

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1.	**a)** $A(2,-4)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=-4$	**2p**
	$f(2)=4-4m+m^2-4=m^2-4m$	**2p**
	$m^2-4m=-4$, deci $m=2$	**3p**
	b) $\Delta=4m^2-4m^2+16=16>0$, deci ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale x_1 și x_2, pentru orice număr real m	**2p**
	$x_1+x_2=2m$, $x_1x_2=m^2-4$, deci $\left\|x_1x_2-2x_1-2x_2\right\|=\left\|m^2-4m-4\right\|$	**3p**
	$\left\|m^2-4m-4\right\|=m \Rightarrow m^2-4m-4=-m$ sau $m^2-4m-4=m$ și, cum $m\geq 0$, obținem $m=4$ sau $m=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	**3p**
2.	**a)** $AB^2=900\,\text{cm}^2 \Rightarrow AB=30\,\text{cm}$	**2p**
	$AM=BM=15\sqrt{5}\,\text{cm}$	**2p**
	$P_{\Delta AMB}=AM+MB+AB=30\left(\sqrt{5}+1\right)\text{cm}$	**3p**
	b) Dacă N este mijlocul laturii AB, atunci segmentul MN este diametru al cercului înscris în pătrat, deci $m(\sphericalangle MEN)=m(MFN)=90°$	**2p**
	Cum $MN\perp AB$ și $MN=30\,\text{cm}$, obținem $ME=MF=\frac{30^2}{15\sqrt{5}}=12\sqrt{5}\,\text{cm}$	**3p**
	$\frac{ME}{MA}=\frac{MF}{MB}\Rightarrow EF \parallel AB$ și $\frac{EF}{AB}=\frac{12\sqrt{5}}{15\sqrt{5}}$, deci $EF=24\,\text{cm}$	**3p**
3.	**a)** $(x*y)*z=\left(\log_2\left(2^x+2^y\right)\right)*z=\log_2\left(2^{\log_2\left(2^x+2^y\right)}+2^z\right)=\log_2\left(2^x+2^y+2^z\right)$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
	$x*(y*z)=x*\left(\log_2\left(2^y+2^z\right)\right)=\log_2\left(2^x+2^{\log_2\left(2^y+2^z\right)}\right)=\log_2\left(2^x+2^y+2^z\right)=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**4p**
	b) $x*x=\log_2\left(2\cdot 2^x\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }1024\text{ ori}}=\log_2\left(1024\cdot 2^x\right)=\log_2\left(2^{10}\cdot 2^x\right)=\log_2\left(2^{10+x}\right)=10+x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$10+x=x^2+6x+14 \Leftrightarrow x^2+5x+4=0$, deci $x=-4$ sau $x=-1$	**3p**

4.	**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=$	**2p**
	$=2$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y=2x-\frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
	b) $\mathcal{A}=\int_0^1\lvert g(x)\rvert dx=\int_0^1\left(2x^2+x\operatorname{arctg}x\right)dx=\frac{2x^3}{3}\Big\vert_0^1+\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{2}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}1-\int_0^1\frac{1}{2}dx=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\pi+2}{12}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Itemul de tip completare elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**
Itemul de tip alegere multiplă elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare), inclusiv alegerea adecvată a distractorilor	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**
Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**