

Concursul de admitere iulie 2018  
Domeniul de licență - *Matematică*

**I. Algebră.** Fie matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 3 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & m+3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , unde  $m$  este un parametru real.

- (a) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $A(m)$  să fie inversabilă.
- (b) Arătați că  $A(0)^3 - 5A(0)^2 + 6A(0) = O_3$ .
- (c) Calculați  $A(0)^{2018}$  și  $A(1)^{2018}$ .
- (d) Fie  $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  și  $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  astfel încât  $B \cdot C = A(0)$ . Calculați  $\det(CB)$  și  $\text{tr}(CB)$ , unde am notat cu  $\text{tr}(CB)$  suma elementelor de pe diagonala principală a matricei  $CB$ .

**II. Analiză.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 8|}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determinați asimptotele la graficul funcției  $f$ .
- (b) Determinați punctele în care funcția  $f$  nu este derivabilă și intervalele de convexitate ale lui  $f$ .
- (c) Calculați  $\int_2^4 f^2(x) dx$ .
- (d) Pentru orice număr natural  $n \geq 1$  notăm  $I_n = \int_3^4 (f(x))^n dx$ . Demonstrați că șirul  $(I_n)_n$  este convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**III. Geometrie.** În planul de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(3, 0)$  și  $M(a, 0)$ , unde  $a \in (0, 3)$ . Pe segmentul  $OA$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $OMP$  și  $MAQ$ , de aceeași parte a segmentului  $OA$ , cu punctele  $P$  și  $Q$  situate în cadranul I (ambele coordonate strict pozitive). Fie  $N$  mijlocul segmentului  $PQ$ .

- (a) Dacă  $a = 1$ , găsiți coordonatele punctelor  $P$  și  $Q$  și arătați că dreptele  $PQ$  și  $QA$  sunt perpendiculare.
- (b) Dacă  $a = 1$ , fie  $B$  punctul de intersecție al dreptelor  $OP$  și  $AQ$ . Arătați că punctele  $M$ ,  $N$  și  $B$  sunt coliniare.
- (c) Găsiți valoarea lui  $a$  pentru care dreptele  $PQ$  și  $OP$  sunt perpendiculare.
- (d) Arătați că pentru orice valoare a lui  $a \in (0, 3)$  dreptele  $MN$  trec printr-un punct fix.

**IV. Informatică.** Ionuț a fost admis la FMI și tatăl lui i-a făcut cadou o mașină la mâna a doua ca să călătorească cu ea în vacanță, împreună cu prietena sa Măriuca. Din păcate, mașina este veche și la scurt timp, acul vitezometrului se rupe. Descurcăreț de mic, Ionuț îl lipește cu adeziv, dar își dă seama că în urma reparației, acul nu mai indică viteza corectă. Făcând mai multe experimente, Ionuț realizează că viteza pe care o indică acul vitezometrului diferă de viteza reală a mașinii cu un număr real constant  $c$ , a cărui valoare absolută e mai mică decât 100 km/oră.

Pentru a calcula constanta  $c$ , Ionuț merge pe 3 segmente de drum succesive, pe fiecare dintre ele cu viteză constantă și își notează viteza indicată de acul defect al vitezometrului pe fiecare segment de drum:

- pe primul segment de drum, de 40 km, acul îi indică o viteză de 50 km/oră;
- pe al doilea segment de drum, tot de 40 km, parcurs la o altă viteză, acul îi indică 60 km/oră;
- pe al treilea segment de drum, de 100 km, acul îi indică 90 km/oră.

În acest timp, Măriuca înregistrează timpii în care sunt parcurse cele 3 segmente de drum, dar pentru că vrea să îl pună la încercare pe Ionuț, la final nu îi spune decât timpul total  $t$  de 5 ore în care a parcurs toate cele 3 segmente de drum cumulate. După ce își aduce aminte din liceu că viteza se calculează ca raportul dintre distanță și timp, Ionuț ajunge la concluzia că acul vitezometrului indică întotdeauna cu 30 km/oră mai mult decât viteza reală a mașinii.

Scrieți un program care citește numărul natural  $n$ , reprezentând numărul segmentelor succesive de drum pe care Ionuț le parcurge, numărul real  $t$ , reprezentând timpul total (în ore) în care acestea sunt parcurse, precum și  $n$  perechi de numere reale, fiecare reprezentând lungimea unui segment de drum (în km) și valoarea indicată de acul vitezometrului pe segmentul de drum respectiv (în km/oră), iar apoi afișează valoarea numerică a constantei reale  $c$  (în km/oră), calculată cu o precizie de 2 zecimale, cu care viteza indicată de acul defect diferă de viteza reală a mașinii.

#### Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, funcții din biblioteci de bază (inclusiv cele de intrare/ieșire), dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.

**Timp de lucru 3 ore.**

Concursul de admitere iulie 2018  
 Domeniul de licență - *Matematică*

Barem

<b>I. Algebră.</b>	Oficiu .....	1 p
(a)	$A(m)$ inversabilă dacă și numai dacă $\det A(m) \neq 0$ .....	0,5 p
	Calculul determinantului: $m(m+2)(m+3)$ .....	1 p
	$m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$ .....	0,5 p
(b)	Calculul puterilor $A(0)^2$ și $A(0)^3$ ale matricei $A(0)$ .....	1 p
	Verificarea egalității .....	1 p
(c)	$A(0)^{2018} = \begin{pmatrix} 2^{2018} & -2^{2018} & 3^{2018} \\ 0 & 0 & 3^{2018} \\ 0 & 0 & 3^{2018} \end{pmatrix}$ , .....	1,5 p
	$A(1)^{2018} = \begin{pmatrix} 3^{2018} & 1 - 3^{2018} & 4^{2018} - 1 \\ 0 & 1 & 4^{2018} - 1 \\ 0 & 0 & 4^{2018} \end{pmatrix}$ .....	1,5 p
(d)	$\text{tr}(CB) = 5$ .....	1 p
	$\det(CB) = 6$ .....	1 p
<b>II. Analiză.</b>	Oficiu .....	1 p
(a)	$y = x - 3$ asimptotă oblică spre $+\infty$ .....	0,5 p
	$y = -x + 3$ asimptotă oblică spre $-\infty$ .....	1 p
	$f$ nu are asimptote verticale .....	0,5 p
(b)	$f$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ .....	0,5 p
	Studiul derivabilității în $x = 2$ .....	0,75 p
	Studiul derivabilității în $x = 4$ .....	0,75 p
	Calculul derivatei a doua .....	0,5 p
	Concluzia: $f$ concavă pe $(-\infty, 2], [2, 4], [4, \infty)$ .....	0,5 p
(c)	calculul integralei $I = \frac{4}{3}$ .....	2 p
(d)	$(I_n)_n$ descrescător .....	0,5 p
	$(I_n)_n$ mărginit .....	0,5 p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .....	1 p
<b>III. Geometrie.</b>	Oficiu .....	1 p
(a)	$P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ și $Q(2, \sqrt{3})$ .....	1 p
	Demonstrarea perpendicularității .....	1 p
(b)	Demonstrarea coliniarității .....	2 p
(c)	$P(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ și $Q(\frac{a+3}{2}, \frac{(3-a)\sqrt{3}}{2})$ .....	1 p
	Expresiile pantelor $m_{OP} = \sqrt{3}$ și $m_{PQ} = \frac{\sqrt{3}(3-2a)}{3}$ .....	1 p
	Condiția de perpendicularitate și calculul lui $a = 2$ .....	1 p
(d)	Ecuția dreptei $MN$ : $(x-a)3\sqrt{3} - y(3-2a) = 0$ .....	1 p
	Identificarea punctului fix $B(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ .....	1 p

<b>IV. Informatică.</b> Oficiu .....	1 p
Găsirea relației care permite aflarea constantei $c$ .....	2 p
Considerarea unui interval de căutare pentru constanta $c$ care conține și valori negative .....	1 p
Găsirea constantei $c$ prin căutare .....	3 p
Respectarea aproximării de 2 zecimale .....	1 p
Corectitudinea limbajului .....	1 p
Explicații .....	1 p