UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONCURS DE ADMITERE, 15 iulie 2018
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Acestea trebuie indicate de candidat pe foaia de concurs. Obţinerea punctajului aferent problemei este condiţionată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte şi numai a acelora.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (5 puncte) Fie $a = (1+\sqrt{2})^7 + (1-\sqrt{2})^7$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

$\boxed{A}$ $a \notin \mathbb{R}$; $\boxed{B}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $\boxed{C}$ $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; $\boxed{D}$ $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\boxed{E}$ $a \in \mathbb{N}$.

2. (5 puncte) Fie A o mulţime cu 4 elemente şi B o mulţime cu 5 elemente. Numărul funcţiilor definite pe A cu valori în B este:

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 4^5; $\boxed{C}$ 5^4; $\boxed{D}$ A_5^4; $\boxed{E}$ C_5^4.

3. (5 puncte) Fie m un parametru real. Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3 - 12x = m$ este:

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 1 pentru $m < -16$; $\boxed{C}$ 1 pentru $m > 16$; $\boxed{D}$ 3 pentru $-16 < m < 16$; $\boxed{E}$ 3 pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

4. (5 puncte) Aria unui triunghi ABC este egală cu 5 unităţi. Vârfurile A şi B au coordonatele $(2,1)$, respectiv $(3,-2)$, în timp ce vârful C se află pe dreapta $y = x+3$. Atunci coordonatele vârfului C pot fi:

$\boxed{A}$ $(-3/2, 3/2)$; $\boxed{B}$ $(3/4, -3/2)$; $\boxed{C}$ $(7/2, 13/2)$;
$\boxed{D}$ $(11/2, -1/2)$; $\boxed{E}$ $(2,5)$.

5. (5 puncte) Care dintre următoarele mulţimi poate fi o submulţime a soluţiei generale a ecuaţiei

$$1 + \cos 3x = 2\cos 2x\ ?$$

$\boxed{A}$ $\left\{ n\pi + \frac{\pi}{3} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$; $\boxed{B}$ $\left\{ n\pi + \frac{\pi}{6} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$; $\boxed{C}$ $\left\{ n\pi - \frac{\pi}{6} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$; $\boxed{D}$ $\{ 2n\pi | n \in \mathbb{Z} \}$;
$\boxed{E}$ $\left\{ n\pi - \frac{\pi}{3} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$.

6. (5 puncte) Fie a un număr real strict pozitiv diferit de 1. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\ln a} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ este

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ $\dfrac{\ln a}{|\ln a|}$; $\boxed{D}$ $\ln a$; $\boxed{E}$ $2\ln a$.

PARTEA B

1. Considerăm inelul $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ definit pe mulţimea $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi reali de operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a polinoamelor şi

$$A = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \le 3 \}.$$

a) (8 puncte) Să se arate că A este un subgrup al grupului $(\mathbb{R}[X], +)$.

b) (5 puncte) Să se arate că A nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}[X]$ în raport cu înmulţirea polinoamelor.

c) (7 puncte) Câte polinoame divizibile cu $X^2 - 4$ din mulţimea A dau prin împărţire la $X^2 - 4X + 3$ restul $X + 1$? Justificaţi răspunsul.

2. a) (7 puncte) Fie a şi b două numere reale strict pozitive. Punctele $B(a, 0)$ şi $D(0, b)$ sunt două vârfuri (opuse) ale unui pătrat $ABCD$. Determinaţi coordonatele celorlalte două vârfuri.

b) (8 puncte) Demonstraţi că dacă $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, atunci

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

3. Fie $a > 0$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^x}, & x \leq a \\ \sqrt{x}, & x > a \end{cases}.$$

a) (10 puncte) Determinaţi numărul a pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) (8 puncte) Determinaţi primitivele funcţiei f în cazul valorilor a pentru care acestea există.

c) (7 puncte) Calculaţi integrala $\int_0^1 f(x)\, dx$ în funcţie de a.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

1. $\boxed{E}$; **2.** $\boxed{C}$; **3.** $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$; **4.** $\boxed{A}$, $\boxed{C}$; **5.**$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$; **6.** $\boxed{D}$.

PARTEA B

1. a) Precizăm că putem rescrie A astfel $A = \{f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$. Polinomul nul 0 are gradul $-\infty$, prin urmare $0 \in A$ şi astfel $A \neq \emptyset$ $\forall f, g \in A,\ f + g \in A$ deoarece $\forall f, g \in A,\ \exists a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3) :\ f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ prin urmare $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 \in A$ (**Altfel:** Ştiind că $\operatorname{grad}(f + g) \leq \max\{\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\}$, din $\operatorname{grad} f \leq 3$ şi $\operatorname{grad} g \leq 3$ rezultă $\operatorname{grad}(f + g) \leq 3$ şi astfel $f + g \in A$) $\forall f \in A,\ -f \in A$ deoarece $\forall f \in A,\ \exists a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3) :\ f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ şi $-f = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + (-a_3)X^3 \in A$

1. b) Luând $f = X^3 \in A$ avem $f \cdot f = X^6 \notin A$ deoarece $f \cdot f$ are gradul 6 (**sau:** dacă $f, g \in A$ au ambele gradul egal cu 3, cum $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g = 6$, $f \cdot g \notin A$).

Observaţie: Simpla scriere a faptului că produsul a două polinoame de grad cel mult 3 poate avea grad mai mare decât 3 se notează doar cu 0,5 puncte dacă nu este însoţită de un exemplu sau de enunţarea corectă a proprietăţii ce leagă gradul produsului a 2 polinoame de gradele celor 2 polinoame.

1. c) Soluţia 1: Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $f = a + bX + cX^2 + dX^3$.
Conform teoremei împărţirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (1)$$

De asemenea, din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q_2 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4)q_2 = (X - 2)(X + 2)q_2 \quad (2)$$

Calculăm $f(1)$ şi $f(3)$ folosind (1) şi obţinem:

$$a + b + c + d = 2 \quad (3)$$

$$a + 3b + 3^2c + 3^3d = 4 \quad (4)$$

Calculăm $f(2)$ şi $f(-2)$ folosind (2) şi obţinem:

$$a + 2b + 2^2c + 2^3d = 0 \quad (5)$$

$$a + (-2)b + (-2)^2c + (-2)^3d = 0 \quad (6)$$

Polinomul f satisface condiţiile din enunţ dacă şi numai dacă (a, b, c, d) este o soluţie a sistemului de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute (S) format cu ecuaţiile (3), (4), (5), (6). Determinantul acestui sistem este (determinantul de tip Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1 & 3^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 120 \neq 0,$$ prin urmare sistemul (S) este compatibil determinat, deci există un singur polinom f care satisface condiţiile din problemă.

Observaţie: Calculul lui Δ poate fi efectuat şi fără a îl recunoaşte ca fiind un determinant de tip Vandermonde, iar rezolvarea sistemului (S) nu este necesară pentru stabilirea răspunsului la întrebare.

Soluţia 2: Din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4)q \quad (1)$$

Gradul lui q este cel mult 1, prin urmare există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $q = aX + b$ şi atunci (1) devine

$$f = (X^2 - 4)(aX + b) \quad (2)$$

Conform teoremei împărţirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (3)$$

de unde rezulă $f(1) = 2$ şi $f(3) = 4$ Folosind (2), acum rezultă

$$2 = f(1) = -3(a + b) \Leftrightarrow a + b = -\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$4 = f(3) = 5(3a + b) \Leftrightarrow 3a + b = \frac{4}{5} \quad (5)$$

Cum sistemul format cu ecuaţiile (4) şi (5) are o soluţie unică $\left(a = \frac{11}{15},\ b = -\frac{7}{5}\right)$, există un singur polinom f care satisface condiţiile din problemă.

Observaţie: Nici această soluţie nu necesită aflarea lui f, dar conduce mai uşor la determinarea sa: $f = (X^2 - 4)\left(\frac{11}{15}X - \frac{7}{5}\right) = \frac{11}{15}X^3 - \frac{7}{5}X^2 - \frac{44}{15}X + \frac{28}{5}$.
(Avem astfel şi forma soluţiei sistemului (S) din **Soluţia 1**.)

2. a) BD este una dintre diagonalele pătratului. Panta dreptei BD este $k = -\frac{b}{a}$, iar ecuaţia dreptei este $bx + ay - ab = 0$. Lungimea laturii pătratului este $BD/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$. A doua diagonală a pătratului, AC, trece prin mijlocul E al segmentului $[BD]$ şi e perpendiculară pe prima. Coordonatele lui E sunt $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, iar panta dreptei AC este $\frac{a}{b}$. Ecuaţia dreptei AC este $y - \frac{b}{2} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$. Fie $C(x_C, y_C)$ unul dintre cele două vârfuri rămase ale pătratului. C se află pe dreapta A, iar $CD^2 = BD^2/2$, deci coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} y_C - \frac{b}{2} = \frac{a}{b}\left(x_C - \frac{a}{2}\right), \\ 2\left[x_C^2 + \left(y_C - b)^2\right)\right] = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Sistemul de mai sus ne conduce la ecuaţia $4x_C^2 - 4ax_C + a^2 - b^2 = 0$, cu soluţiile $x_C = \frac{1}{2}(a \pm b)$. Dacă alegem semnul $+$, obţinem unul dintre vârfuri, de exemplu, $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, iar dacă alegem semnul $-$, obţinem vârful opus, $A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

2. b) Fie MS membrul stâng al identităţii de demonstrat şi MD membrul drept. Atunci avem

$$\text{MS} = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma)$$

Conform condiţiei din enunţ, $\beta - \gamma = \pi - \alpha$, aşadar

$$\text{MS} = \sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin(\pi - \alpha) = \sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin\alpha = \sin\alpha\left[\sin\alpha + \sin(\beta + \gamma)\right]$$

Folosind din nou condiţia din enunţ, avem $\alpha = \pi - (\beta - \gamma)$, deci

$$\text{MS} = \sin\alpha\left[\sin(\pi - (\beta - \gamma)) + \sin(\beta + \gamma)\right] = \sin\alpha\left[\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma)\right]$$

sau

$$\text{MS} = \sin\alpha\left[2\sin\beta\cos\gamma\right] = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \text{MD}.$$

3. a) Funcţia este continuă în punctele $x \neq a$ (fiind exponenţială sau de tip putere într-o vecinătatea lui x, şi $a > 0$ garantează că $\sqrt{x}$ este definit pentru $x > a$). În punctul $x = a$ avem

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \frac{1}{2^a} \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \sqrt{a},$$

deci condiţia necesară şi suficientă pentru continuitatea lui f este $\dfrac{1}{2^a} = \sqrt{a}$. Membrul drept al acestei ecuaţii este o funcţie strict crescătoare, iar membrul stâng o funcţie descrescătoare (ca şi funcţie de a), deci ecuaţia poate avea cel mult o soluţie. Pe de altă parte $a = \frac{1}{2}$ este o soluţie, deci f este continuă dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

3. b) Dacă există o primitivă a lui f, atunci f are proprietatea lui Darboux, deci nu are discontinuitate de speţa I. Pentru $a \neq \frac{1}{2}$, f ar avea însă o astfel de discontinuitate, deci f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{2}$. Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci primitivele lui f au forma

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c_1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Acestea trebuie să fie continue, deci

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} + c_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + c_2.$$

Astfel primitivele au forma

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + c, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Acestea sunt şi derivabile datorită consecinţei teoremei lui Lagrange, şi are loc $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. c) Dacă $0 < a < 1$, atunci $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_a^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a \frac{1}{2^x}\,dx + \int\limits_a^1 \sqrt{x}\,dx = -\dfrac{1}{2^x \ln 2}\Bigg|_0^a + \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2^a \ln 2} + \dfrac{1}{\ln 2}$.

Dacă $1 \leq a$, atunci $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{2^x}\,dx = -\dfrac{1}{2^x \ln 2}\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2\ln 2}$.

BAREM DE CORECTARE

PARTEA A

1. $\boxed{E}$ .... 5 p
2. $\boxed{C}$ .... 5 p
3. $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ .... 5 p
4. $\boxed{A}$, $\boxed{C}$ .... 5 p
5. $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ .... 5 p
6. $\boxed{D}$ .... 5 p

PARTEA B

1. a) Precizăm că putem rescrie A astfel
$A = \{f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.
a) Polinomul nul 0 are gradul $-\infty$, prin urmare $0 \in A$ şi astfel $A \neq \emptyset$ .... 2 p
$\forall f, g \in A,\ f + g \in A$ .... 3 p
deoarece $\forall f, g \in A,\ \exists a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3)$:
$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$
prin urmare $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 \in A$
(**Altfel:** Ştiind că $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}\, f, \text{grad}\, g\}$, din $\text{grad}\, f \leq 3$ şi $\text{grad}\, g \leq 3$ rezultă
$\text{grad}(f + g) \leq 3$ şi astfel $f + g \in A$)
$\forall f \in A,\ -f \in A$ .... 3 p
deoarece $\forall f \in A,\ \exists a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3):\ f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ şi
$-f = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + (-a_3)X^3 \in A$
1. b) Luând $f = X^3 \in A$ avem $f \cdot f = X^6 \notin A$ deoarece $f \cdot f$ are gradul 6 .... 5 p
(**sau:** dacă $f, g \in A$ au ambele gradul egal cu 3, cum $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}\, f + \text{grad}\, g = 6$, $f \cdot g \notin A$)
Observaţie: Simpla scriere a faptului că produsul a două polinoame de grad cel mult 3 poate avea grad mai mare decât 3 se notează doar cu 0,5 puncte dacă nu este însoţită de un exemplu sau de enunţarea corectă a proprietăţii ce leagă gradul produsului a 2 polinoame de gradele celor 2 polinoame.
1. c) Soluţia 1: Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $f = a + bX + cX^2 + dX^3$.
Conform teoremei împărţirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât
$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (1)$ .... 1 p
De asemenea, din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q_2 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât
$f = (X^2 - 4)q_2 = (X - 2)(X + 2)q_2 \quad (2)$ .... 1 p
Calculăm $f(1)$ şi $f(3)$ folosind (1) şi obţinem:
$a + b + c + d = 2 \quad (3)$ .... 0,5 p
$a + 3b + 3^2c + 3^3d = 4 \quad (4)$ .... 0,5 p
Calculăm $f(2)$ şi $f(-2)$ folosind (2) şi obţinem:
$a + 2b + 2^2c + 2^3d = 0 \quad (5)$ .... 0,5 p
$a + (-2)b + (-2)^2c + (-2)^3d = 0 \quad (6)$ .... 0,5 p
Polinomul f satisface condiţiile din enunţ dacă şi numai dacă (a, b, c, d) este o soluţie a sistemului de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute (S) format cu ecuaţiile (3), (4), (5), (6). .... 1 p
Determinantul acestui sistem este (determinantul de tip Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1 & 3^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 120 \neq 0, \text{.........................} \ 1 \text{ p}$$

prin urmare sistemul (S) este compatibil determinat, deci există un singur polinom f care satisface condiţiile din problemă. .... 1 p
Observaţie: Calculul lui Δ poate fi efectuat şi fără a îl recunoaşte ca fiind un determinant de tip Vandermonde, iar rezolvarea sistemului (S) nu este necesară pentru stabilirea răspunsului la întrebare.
Soluţia 2: Din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$f = (X^2 - 4)q \quad (1)$ .... 1 p
Gradul lui q este cel mult 1, prin urmare există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $q = aX + b$ .... 1 p
şi atunci (1) devine

$f = (X^2 - 4)(aX + b) \quad (2).$

Conform teoremei împărţirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (3)$ .... 1 p

de unde rezulă $f(1) = 2$ şi $f(3) = 4$ .... 1 p
Folosind (2), acum rezultă

$2 = f(1) = -3(a + b) \;\Leftrightarrow\; a + b = -\dfrac{2}{3} \quad (4)$ .... 1 p

$4 = f(3) = 5(3a + b) \;\Leftrightarrow\; 3a + b = \dfrac{4}{5} \quad (5)$ .... 1 p

Cum sistemul format cu ecuaţiile (4) şi (5) are o soluţie unică $\left(a = \dfrac{11}{15},\ b = -\dfrac{7}{5}\right)$, există un singur polinom f care satisface condiţiile din problemă. .... 1 p

Observaţie: Nici această soluţie nu necesită aflarea lui f, dar conduce mai uşor la determinarea sa:

$$f = (X^2 - 4)\left(\frac{11}{15}X - \frac{7}{5}\right) = \frac{11}{15}X^3 - \frac{7}{5}X^2 - \frac{44}{15}X + \frac{28}{5}.$$

(Avem astfel şi forma soluţiei sistemului (S) din **Soluţia 1**.)

2. a) BD este una dintre diagonalele pătratului.

(i) Panta dreptei BD este $k = -\dfrac{b}{a}$, iar ecuaţia dreptei este $bx + ay - ab = 0$ .... 1 p

(ii) Lungimea laturii pătratului este $BD/\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$ .... 1 p

(iii) A doua diagonală a pătratului, AC, trece prin mijlocul E al segmentului $[BD]$ şi e perpendiculară pe prima. Coordonatele lui E sunt $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$, iar panta dreptei AC este $\dfrac{a}{b}$ .... 1 p

(iv) Ecuaţia dreptei AC este $y - \dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$ .... 1 p

(v) Fie $C(x_C, y_C)$ unul dintre cele două vârfuri rămase ale pătratului. C se află pe dreapta A, iar $CD^2 = BD^2/2$, deci coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} y_C - \dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{b}\left(x_C - \dfrac{a}{2}\right), \\ 2\left[x_C^2 + \left(y_C - b)^2\right)\right] = a^2 + b^2 \end{cases}$$

.... 1 p

(vi) Sistemul de mai sus ne conduce la ecuaţia $4x_C^2 - 4ax_C + a^2 - b^2 = 0$, cu soluţiile $x_C = \dfrac{1}{2}(a \pm b)$ .... 1 p

(vii) Dacă alegem semnul $+$, obţinem unul dintre vârfuri, de exemplu, $C\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$, iar dacă alegem semnul $-$, obţinem vârful opus, $A\left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$ .... 1 p

2. b)

Fie MS membrul stâng al identităţii de demonstrat şi MD membrul drept. Atunci avem

(i) MS$=\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma)$ .... 2 p

(ii) Conform condiţiei din enunţ, $\beta - \gamma = \pi - \alpha$, aşadar
MS$=\sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin(\pi - \alpha) = \sin^2\alpha + \sin(\beta + \gamma)\sin\alpha = \sin\alpha\left[\sin\alpha + \sin(\beta + \gamma)\right]$ .... 2 p

(iii) Folosind din nou condiţia din enunţ, avem $\alpha = \pi - (\beta - \gamma)$, deci
MS=$\sin\alpha\,[\sin(\pi - (\beta - \gamma)) + \sin(\beta + \gamma)] = \sin\alpha\,[\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma)]$ sau .... 2 p

(iv) MS=$\sin\alpha\,[2\sin\beta\cos\gamma] = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$=MD. ....2 p

3. a) Funcţia este continuă în punctele $x \neq a$ (fiind exponenţială sau de tip putere într-o vecinătatea lui x, şi $a > 0$ garantează că $\sqrt{x}$ este definit pentru $x > a$). .... 2 p

În punctul $x = a$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \dfrac{1}{2^a}$ şi .... 2 p

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \sqrt{a}$, ... 2 p

deci condiţia necesară şi suficientă pentru continuitatea lui f este $\dfrac{1}{2^a} = \sqrt{a}$. .... 1 p

Membrul drept al acestei ecuaţii este o funcţie crescătoare, iar membrul stâng o funcţie descrescătoare (ca şi funcţie de a), deci ecuaţia poate avea cel mult o soluţie. .... 2 p

Pe de altă parte $a = \frac{1}{2}$ este o soluţie, deci f este continuă dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{2}$. .... 1 p

3. b) Dacă există o primitivă a lui f, atunci f are proprietatea lui Darboux, deci nu are discontinuitate de speţa I. Pentru $a \neq \frac{1}{2}$, f ar avea însă o astfel de discontinuitate, deci f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{2}$. ....1 p

Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci primitivele lui f au forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x}\cdot\frac{1}{\ln 2} + c_1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ . ... 4 p

Acestea trebuie să fie continue, deci $-\frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} + c_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + c_2$. .... 2 p

Astfel primitivele au forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x}\cdot\frac{1}{\ln 2} + c, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + c, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ . ... 1 p

3. c) Dacă $0 < a < 1$, atunci $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_a^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a \frac{1}{2^x}\,dx + \int\limits_a^1 \sqrt{x}\,dx = -\dfrac{1}{2^x\ln 2}\Big|_0^a +$ $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_a^1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2^a\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 2}$. .... 4 p

Dacă $1 \leq a$, atunci $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{2^x}\,dx = -\dfrac{1}{2^x\ln 2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2\ln 2}$. .... 3 p

NOTĂ: La toate problemele din partea B orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.