Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$, știind că $b_2=4$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$ și $g(x)=2018-x$. Calculați $g(f(1))$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x=5^{x^2}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
5p	**6.** Arătaţi că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{5}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.
5p	**b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.
	2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)dx=22$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1b_3=b_2^2$	**2p**
	$b_1b_2b_3=b_2^3=4^3=64$	**3p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$g\left(f(1)\right)=g(0)=2018$	**3p**
3.	$5^{2x}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-2x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{90}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
5.	$m_d=\dfrac{a-1}{a^2}$	**2p**
	Dreapta d este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow\dfrac{a-1}{a^2}=0$, deci $a=1$	**3p**
6.	Cum $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	**2p**
	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-6-1=-7$	**2p**
b)	$xA(y)-yA(x)=x\begin{pmatrix}y+2&y\\1&-2\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+2x-yx-2y&xy-yx\\x-y&-2x+2y\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2(x-y)&0\\x-y&-2(x-y)\end{pmatrix}=(x-y)\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0)\Rightarrow\left(aA(-1)+A(a)\right)A(0)=(a+1)A(0)A(0)=4(a+1)I_2$	**3p**
	$4(a+1)=a^2+7\Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$f=4X^3-6X+2\Rightarrow f(1)=4\cdot 1^3-6\cdot 1+2=$	**3p**
	$=4-6+2=0$	**2p**

b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$	**3p**
	Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	**2p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4}\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$	**3p**
	$\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq f(1)\Rightarrow f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f\left(\sqrt{x}\right)\geq 0\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 0$, deci $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2\left(3x^3+3x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\right\|_0^2=$	**3p**
	$=12+8+2=22$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx=\left.e^{x^3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\left.-\frac{\pi}{x+1}\right\|_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$	**3p**
	$\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow n=2$	**2p**