S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a V-a

Problema 1.

Aflaţi numerele naturale a, b şi c, astfel încât a + b = $\frac{c+2}{c+1}$.

I.Fota, Izbiceni

Problema 2.

Se considera numerele naturale de forma N = 1 ± 2 ± 3 ±4 ± …± 2017.Exista o alegere a semnelor + sau – astfel incat N = 0 ? Justificati raspunsul dat.

Gazeta Matematica

Problema 3

Determinati numerele naturale x si y astfel incat $2^{2x+1} - 2^x + 2^y = 2018$

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 4.

Pentru $n \in$ N* , notăm n ? = $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot K \cdot n^n$. Să se afle ultimele cinci cifre ale numărului

S_n = 1? + 2? + 3? + . . . + n? , pentru orice $n \geq 4$.

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Nota-Toate subiectele sunt obligatorii
-Timp de lucru 3 ore
-Fiecare problema este notata de la 0 la 7

S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a V-a

Problema 1

Aflaţi numerele naturale a, b şi c, astfel încât a + b = $\frac{c+2}{c+1}$.

I.Fota, Izbiceni

<u>Solutie</u>:

a + b = $\frac{c+2}{c+1} = \frac{c+1}{c+1} + \frac{1}{c+1} = 1 + \frac{1}{c+1} \in N \Rightarrow c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0$…………………...….4p

Numerele căutate sunt: a = 0, b = 2, c = 0 sau a = 1, b = 1, c = 0 sau a = 2, b = 0, c = 0……3p

Problema 2

Se considera numerele naturale de forma N = 1 ± 2 ± 3 ±4 ± …± 2017.Exista o alegere a semnelor + sau – astfel incat N = 0 ?

Justificati raspunsul dat.

Gazeta Matematica

<u>Solutie</u>:

Raspunsul este NU……………….1p

Pentru ca rezultatul sa fie 0 trebuie ca suma numerelor care se aduna S_1 sa fie egala cu suma numerelor care se scadS_2 …………...2p

Dar $S_1 + S_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2017 \cdot 1009$ 2p

Cum $S_1 = S_2 \Rightarrow 2S_1 = 2017 \cdot 1009$, imposibil,deoarece membrul stang este un numar par iar membrul drept este un numar impar……………………………2p

Problema 3

Determinati numerele naturale x si y astfel incat $2^{2x+1} - 2^x + 2^y = 2018$

Nicolae Tomescu, Corabia

<u>Solutie</u>:

Avem: $2^x(2^{x+1} - 1) + 2^y = 2018$.......................1p

Impartim relatia prin 2 si obtinem: $2^{x-1}(2^{x+1} - 1) + 2^{y-1} = 1009$...........1p

Cazul 1.

Daca 2^{y-1} este impar,atunci y=1 si din $2^{x-1}(2^{x+1} - 1) = 1008$ avem $2^{x-1}(2^{x+1} - 1) =$
$= 2^4(2^6 - 1)$ de unde x=5...........................2p

Cazul 2.

Daca 2^{y-1} este par,atunci $2^{x-1}(2^{x+1} - 1)$ este impar, de unde 2^{x-1} si $2^{x+1} - 1$ sunt impare
$\Rightarrow x = 1$........................2p

Inlocuind avem 3+$2^{y-1} = 1009 \Rightarrow 2^{y-1}$=1006, fals

Solutia problemei este x=5, y=1..................1p

Problema 4.

Pentru $n \in N^*$, notăm $n ? = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot K \cdot n^n$. Să se afle ultimele cinci cifre ale numărului S_n = 1? + 2? + 3? + . . . + n? , pentru orice $n \geq 4$.

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Solutie:

Avem : S_1 = 1? = 1 , S_2 = 1? + 2? = 1 + 4 = 5 , S_3 = 1? + 2? + 3? == 1 + 4 + 108 = 113

S_4 = 1? + 2? + 3? + 4? = S_3 + 4? = S_3 +$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4$= 113 + 27648 = 27761 ....3p

Cum 5? = $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$ = $3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$ = $3^3 \cdot 20^5$ = $\mathcal{M}\ 10^5$ 2p

(mai exact , 5? = 86.400.000) .

Cu atat mai mult , pentru orice $5 \leq k \leq n$ avem k ? = $\mathcal{M}\ 10^5$ 1p

Deci $S_n = S_4 + \mathcal{M}\ 10^5$ = 27761 + $\mathcal{M}\ 10^5$. Deci ultimele cinci cifre ale

numărului S_n sunt 27.761 ....1p