S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a VI-a

Problema 1.

Resturile impartirilor unui numar natural n la 3, 4 si 5 sunt 1, 2, respectiv 3.Aflati resturile posibile ale impartirii lui n la 120.

Gazeta Matematica

Problema 2.

Să se arate că nu există perechi de numere întregi nenule care verifică relaţia: $x^3y + 2x^3 - 3y + 3 = 0$.

I. Fota, Izbiceni

Problema 3.

Fie a şi b două numere naturale nenule distincte care verifică relaţia: $a + b - ab = (a , b)^2$, unde cu (a , b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Arătaţi că numerele a şi b sunt prime între ele.

Carmen Firicescu, Corabia

Problema 4.

Fie triunghiul ABC. Ducem semidreptele $(AA_k\ , k = \overline{1,n}$ $A_1 \in (BA_2)$, $A_2 \in (A_1A_3)$,etc...,astfel incât $m\sphericalangle(BAA_1)$ să reprezinte $\frac{1}{3}$ din $m\sphericalangle(BAC)$, apoi $m\sphericalangle(A_1AA_2)$ sa reprezinte $\frac{1}{3}$ din $m\sphericalangle(BAA_1)$, etc….

Să se arate că nici o dreaptă $AA_k\ , k = \overline{1,n}$, nu coincide cu latura AC a triunghiul ABC. Coincide una din dreptele $AA_k\ , k = \overline{1,n}$, cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle(BAC)$?

Cristian Moanta, Craiova

Nota-Toate subiectele sunt obligatorii

-Timp de lucru 3 ore

-Fiecare problema este notata de la 0 la 7

S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a VI-a

Problema 1

Resturile impartirilor unui numar natural n la 3, 4 si 5 sunt 1, 2, respectiv 3.Aflati resturile posibile ale impartirii lui n la 120.

Gazeta Matematica

<u>Solutie</u>:

Avem $n=3q_1+1$, $1<3$
$n = 4q_2 + 2$, $2<4$
$n = 5q_3 + 3$, $3< 5$..3p

De unde $n + 2 =\mathcal{M}_3$, $n+ 2 = \mathcal{M}_4$ $n + 2 = \mathcal{M}_5 \Rightarrow n + 2 = [3,4,5]\cdot p \Rightarrow n+2=60p, p\in \mathbb{N}^*$.......2p

Daca $p = 2k \Rightarrow n = 120k - 2$
$n = 120q + 118$, $118 < 120 \Rightarrow r = 118$............1p

Daca $p = 2k + 1 \Rightarrow n = 120k + 58$
$n = 120q + 58$, $58<120 \Rightarrow r = 58$.......................1p

Problema 2

Să se arate că nu există perechi de numere întregi nenule care verifică relaţia: $x^3y + 2x^3 - 3y + 3 = 0$.

I. Fota, Izbiceni

<u>Solutie</u>:

Relaţia se mai poate scrie: $x^3 (y + 2) = 3 (y - 1)$. Deci $x^3 = \frac{3\,(y-1)}{y+2} = \frac{3\,y+6-9}{y+2} = 3 - \frac{9}{y+2}$.....4p

$y + 2 \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \Rightarrow y \in \{-11, -5, -3, -1, 1, 7\}$ şi $x^3 \in \{-6, 0, 2, 4, 6, 12\}$

deci $x \notin Z$...3p

Problema 3

Fie a şi b două numere naturale nenule distincte care verifică relaţia: $a + b - ab = (a\ ,\ b)^2$, unde cu $(a\ ,\ b)$ am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Arătaţi că numerele a şi b sunt prime între ele.

Carmen Firicescu, Corabia

<u>Solutie</u>:

Notez cu $d = (a, b)$, atunci $a = dx$ şi $b = dy$, cu $(x, y) = 1$, $x, y \in \mathbf{N}^*$, $x \neq y$ …………1p

Înlocuind în relaţie obţinem : $dx + dy - d^2xy = d^2$ ……………………………………………..1p

Împărţind relaţia prin d obţinem $x + y - dxy = d$…………………………………………….1p

$d = \frac{x+y}{xy+1} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow xy + 1 / x + y$……………………………..……………………………1p

$xy + 1 \leq x + y \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $y = 1$……………………………………1p

$x = 1 \Rightarrow d = \frac{1+y}{y+1} = 1$ deci numerele a şi b sunt prime între ele. De fapt, $a = 1$………..1p

Analog daca y=1……………………………………………………………………………1p

Problema 4.

Fie triunghiul ABC. Ducem dreptele AA_k , $k = \overline{1,n}$, $A_1 \in (BA_2)$, $A_2 \in (A_1A_3)$,etc...,astfel încât $m(\widehat{BAA_1})$ să reprezinte $\frac{1}{3}$ din $m(\widehat{BAC})$, apoi $m(\widehat{A_1AA_2})$ care reprezinte $\frac{1}{3}$ din $m(\widehat{BAA_1})$, etc….

Să se arate că nici o dreaptă AA_k , $k = \overline{1,n}$, nu coincide cu latura AC a triunghiul ABC. Coincide una din dreptele AA_k , $k = \overline{1,n}$, cu bisectoarea unghiului $\measuredangle(BAC)$?

Cristian Moanta, Craiova

<u>Solutie</u>:

Fie $\propto \stackrel{\text{def}}{=} m(\measuredangle BAC) \Rightarrow m(\measuredangle BAA_1) = \frac{\propto}{3}$, $m(\measuredangle A_1AA_2) = \frac{1}{3} m(\measuredangle BAA_1) = \frac{1}{3^2} \cdot \propto$, …,

$m(\measuredangle A_{n-1}AA_n) = \frac{1}{3} \cdot m(\measuredangle A_{n-2}AA_{n-1}) = \frac{1}{3^n} \cdot \propto$. **(2p)**

$$m(\widehat{BAA_n}) = m(\widehat{BAA_1}) + m(\widehat{A_1AA_2}) + \ldots + m(\widehat{A_{n-1}AA_n}) = \frac{\propto}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) =$$

$= \frac{\propto}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. **(2p)**

Vom arăta că:

$m(\measuredangle BAA_n) \neq m(\measuredangle BAC) \Leftrightarrow m(\measuredangle BAA_n) \neq \propto$, adică $m(\measuredangle BAA_n) < \propto$ sau $m(\measuredangle BAA_n) > \propto$.

Fie $S = \frac{\propto}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$,

$$\frac{S}{3} = \frac{\propto}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right];$$

$$S-\frac{S}{3}=\frac{\propto}{3}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\right]=\frac{\propto}{3}\cdot\left[1-\frac{1}{3^n}\right]<\frac{\propto}{3}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\cdot S<\frac{\propto}{3}\Rightarrow S<\frac{\propto}{2}<\propto.$ **(2p)**

$m(\widehat{BAA_n})=\frac{\propto}{3}\cdot\left[1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right]=\frac{\propto}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{\propto}{2}<\propto.$

Deci: $m\,(\measuredangle BAA_n)\neq\propto\ \Rightarrow (AA_n\ \not\equiv (AC.$

Cum $m\,(\measuredangle BAA_n)<\frac{\propto}{2}\Rightarrow (AA_n\ \not\equiv (AD$, unde $(AD$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle(BAC)$. **(1p)**