S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a VII-a

Problema 1.

Aratati ca nu exista niciun numar de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea ca $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{bc}} + a$.

Gazeta Matematica

Problema 2.

Daca a, b, c sunt numere reale, doua cate doua distincte, si daca m = $\frac{a+b}{a-b}$, n = $\frac{b+c}{b-c}$, p =$\frac{c+a}{c-a}$, sa se demonstreze ca:

a) $(m+1)(n+1)(p+1) = (m-1)(n-1)(p-1)$
b) $mn + np + pm = -1$

dr. Dorin Mărghidanu,Corabia

Problema 3.

Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $p = ab + bc + ca$, număr prim astfel încât p divide a^2b^2+$b^2c^2 + c^2a^2$.

Lucian Tuţescu , Craiova

Problema 4.

Fie triunghiul ABC avand aria S. Fie M mijlocul lui $[BC]$, P mijlocul lui $[AM]$ si Q mijlocul lui $[BM]$. Daca CP ∩ AQ = $\{O\}$, calculati aria Δ AOP in functie de S.

Nicolae Tomescu, Corabia

Nota-Toate subiectele sunt obligatorii
-Timp de lucru 3 ore
-Fiecare problema este notata de la 0 la 7

S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018
Clasa a VII-a

Problema 1

Aratati ca nu exista niciun numar de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea ca $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{bc}} + a$.

Gazeta Matematica

<u>Solutie</u>:

Ridicam relatia la patrat si obtinem:

$\overline{abc} = \overline{bc}$ + a^2 + $2a\sqrt{\overline{bc}}$..2p

Sau 100a = a^2 + $2a\sqrt{\overline{bc}}$..2p

De unde 100 = a + $2\sqrt{\overline{bc}}$..1p

Valoarea maxima a lui a + $2\sqrt{\overline{bc}}$ este 9 + $2\sqrt{99}$ < 9 + 2 · 10 = 29...............1p

Adica 100 < 29 contradictie..1p

Problema 2

Daca a, b, c sunt numere reale, doua cate doua distincte, si daca m = $\frac{a+b}{a-b}$, n = $\frac{b+c}{b-c}$, p =$\frac{c+a}{c-a}$, sa se demonstreze ca:

$$a)(m+1)(n+1)(p+1) = (m-1)(n-1)(p-1)$$

$$b)\ m\ \ + np + pm = -1$$

dr. Dorin Mărghidanu,Corabia.

<u>Solutie</u>:

a) Avem: $m+1 = \frac{2a}{a-b}, n+1 = \frac{2b}{b-c}\ , p+1 = \frac{2c}{c-a}$.............................2p

$m-1 = \frac{2b}{a-b}, n-1 = \frac{2c}{b-c}\ , p-1 = \frac{2a}{c-a}$.............................2p

Prin inmulutire, rezulta: $(m+1)(n+1)(p+1) = (m-1)(n-1)(p-1) =$

$= \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$...1p

b) Dezvoltanţi in a), se obtine: mnp + mn + mp + np + m + n + p + 1= mnp – mn – mp – np + m + n + p – 1..1p
$\Leftrightarrow mn + np + pm = -1$..1p

Problema 3

Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $p = ab + bc + ca$, număr prim astfel încât p divide $a^2b^2+b^2c^2 + c^2a^2$.

Lucian Tuţescu , Craiova

<u>Solutie</u>:

Deoarece $a^2b^2+b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)$, cum $p|(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$, iar $p = ab + bc + ca \Rightarrow p|2abc(a + b + c)$ $(*)$. ………………………….2p
Deoarece $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $p = ab + bc + ca \Rightarrow p \geq 3$ şi $a < p, b < p, c < p$ (**)....................2p
Din p număr prim şi cele două relaţii (*), (**), deducem $p|(a + b + c) \Rightarrow (a + b + c) \geq p = ab + bc + ca \Leftrightarrow a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \geq 0$………………………………….2p
Dar $a, b, c \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 0$, iar din ultimele două relaţii deducem $a = b = c = 1$. În concluzie: $a = b = c = 1, p = 3$..1p

Problema 4.

Fie triunghiul ABC avand aria S. Fie M mijloc $[BC]$, P mijloc $[AM]$ si Q mijloc $[BM]$. Daca CP ∩ AQ = $\{O\}$, calculati aria ΔAOP in functie de S.

Nicolae Tomescu, Corabia

<u>Solutie</u>:

$[AM]$ – mediana in ΔABC⇒ $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM} = \frac{S}{2}$..1p

$[AQ]$ – mediana in ΔABM⇒ $S_{\Delta ABQ} = S_{\Delta AMQ} = \frac{S}{4}$...1p

$[QP]$ – mediana in ΔAQM ⇒ $S_{\Delta AQP} = S_{\Delta MQP} = \frac{S}{8}$..1p

Aplicam teorema lui Menelaus in ΔAQM cu transversala C – P – O.

Avem $\frac{AO}{OQ} \cdot \frac{MP}{AP} \cdot \frac{CQ}{CM} = 1$ de unde $\frac{AO}{OQ} = \frac{2}{3}$..2p

Notam $S_{\Delta AOP} = S_1$,$S_{\Delta POQ} = S_2$ si avem $S_1 + S_2 = \frac{S}{8}$ si $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$...........................1p

Obtinem: $S_1 = \frac{S}{20}$...1p