S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ DANUBIUS

EDIŢIA a XII-a – 26 mai 2018

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Scrieti numarul: a $=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\cdots+2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+2018$ ca suma a 2018 patrate perfecte.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 2.

Aratati ca: $a^2b^2c^2 \geq \sqrt{(2a\sqrt{bc}-1)(2b\sqrt{c}a-1)(2c\sqrt{ab}-1)}$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$ cu a, b, c $\geq$ 1.In ce caz are loc egalitatea?

Elev Emanuel Craciunescu, Craiova

Problema 3

Fie x, y $\in \mathbb{R}$ astfel incat: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2018$. Aratati ca: $2019(x+y)=2017\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Lucian Tutescu, Craiova.

Problema 4.

Fie $ABCA'B'C'$ o prisma triunghiulara regulata dreapta cu AB=AA' =2a.

a) Daca P este mijlocul muchiei AB calculati distanta de la B' la planul (A'PC).
b) Daca E este mijlocul muchiei AA', calculati distanta dintre dreptele EB' si BC'.

Gazeta Matematica

Nota-Toate subiectele sunt obligatorii
-Timp de lucru 3 ore
-Fiecare problema este notata de la 0 la 7

S.S.M.R. FILIALA CORABIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
DANUBIUS
EDIŢIA a XII-a – 6 mai 2018
Clasa aV III-a

Problema 1

Scrieti numarul: a $=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \cdots + 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 2018$ ca suma a 2018 patrate perfecte.

Nicolae Tomescu, Corabia

Solutie:

Pentru $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$, avem :

$k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k)(k^2+3k+2)+1 = (k^2+3k)^2+2(k^2+3k)+1 = (k^2+3k+1)^2$…………………………………………...…………..4p

De unde:

a$= (1^2+3\cdot 1+1)^2+(2^2+3\cdot 2+1)^2+\cdots+(2018^2+3\cdot 2018+1)^2$………………3p

Problema 2.

Aratati ca: $a^2b^2c^2 \geq \sqrt{(2a\sqrt{bc}-1)(2b\sqrt{c}a-1)(2c\sqrt{ab}-1)}$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$ cu a, b, c $\geq$ 1.In ce caz are loc egalitatea?

Elev Emanuel Craciunescu, Craiova

Solutie:

Egalitatea de demonstrate poate fi scrisa: abc$\geq \sqrt{\frac{2a\sqrt{bc}-1}{bc} \cdot \frac{2b\sqrt{c}a-1}{ca} \cdot \frac{2c\sqrt{ab}-1}{ab}}$.

Demonstram ca:

$\frac{2a\sqrt{bc}-1}{bc} \leq a^2 \Leftrightarrow 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{bc}} + \left(\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2 \leq a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{bc}} + \left(\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2 \geq 0$………………….3p

Analog: $\frac{2b\sqrt{ca-1}}{ca} \leq b^2$ si $\frac{2c\sqrt{ab}-1}{ab} \leq c^2$ ……………………………2p

De unde: $\sqrt{\frac{2a\sqrt{bc}-1}{bc} \cdot \frac{2b\sqrt{c}a-1}{ca} \cdot \frac{2c\sqrt{ab}-1}{ab}} \leq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc$…………1p

Avem egalitate daca a$\sqrt{bc}$ = b$\sqrt{ca}$= c$\sqrt{ab}$ = 1

de unde a = b = c = 1…………………………………………………..1p

Problema 3

Fie x, y ∈ ℝ astfel incat: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2018$. Aratati ca: $2019(x+y)=2017\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Lucian Tutescu, Craiova.

Solutie:

Avem $x+\sqrt{x^2+1}=\frac{2018}{\sqrt{y^2+1}+y}=2018\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$…………………..2p

Si analog $y+\sqrt{y^2+1}=\frac{2018}{\sqrt{x^2+1}+x}=2018\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$………………...2p

Adunand cele doua relatii obtinem:

$x+\sqrt{x^2+1}+\ y+\sqrt{y^2+1}=2018\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)-2018(x+y)\Rightarrow 2019(x+y)=2017\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)$…………………………………………………3p

Problema 4.

Fie ABC$A'B'C'$ o prisma triunghiulara regulata dreapta cu AB=AA' =2a.

a)Daca P este mijlocul muchiei AB calculati distanta de la B' la planul (A'PC).
b)Daca E este mijlocul muchiei AA', calculati distanta dintre dreptele EB' si BC'.

Gazeta Matematica

Solutie

a) Daca P mijlocul $[AB]$ in triunghiul ABC echilateral $\Rightarrow CP\perp AB$.
Construim $B'D\perp A'P$.

Din A$A'\perp\ (ABC)$ si CP$\subset (ABC)\Rightarrow AA'\perp CP$

Din CP ⊥ AA' si CP⊥ $AB\Rightarrow \left.\begin{matrix} CP\perp(A'AB) \\ B'D\subset(A'AB)\end{matrix}\right|\Rightarrow CP\perp B'D$ ……………………2p

Din $B'D\perp CP$ si $B'D\perp A'P\Rightarrow B'D\perp(A'PC)\Rightarrow B'D=d\left(B',(A'BC)\right)$.

Din Δ $A'AP\Rightarrow A'P=a\sqrt{5}$

$S_{\Delta A'PB'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot d(P,A'B')=2a^2$

$S_{\Delta A'PB'}=\frac{1}{2}A'P\cdot B'D=\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot B'$P

Obtinem $B'P=\frac{4a\sqrt{5}}{5}$……………………………………………………….2p

b) Notam B $C'\cap B'C=\{O\}$ si construim OF⊥ EB' , $F\in(EB')$.
ΔEB'C isoscel si $[EO]$ mediana ⇒ EO⊥BC'

Din BC' ⊥EO si BC' ⊥ B'C ⇒ $\left.\begin{matrix} BC' \perp (EB'C) \\ OF \subset (EB'C) \end{matrix}\right| \Rightarrow BC' \perp OF.$

Deci OF este perpendiculara comuna a dreptelor EB' si BC'...................................2p

OF inaltime in triunghiul EOB' ⇒ $OF = \frac{a\sqrt{30}}{2}$..1p