Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a IV-a

12 Mai 2018

1) a) Aflați suma și produsul cifrelor numărului a, unde a = (12+12:12):13+(13+14:14):14+2018

b) Se consideră numărul: 4×97 – 96:4. Puneți paranteze rotunde pentru a obține patru rezultate distincte.

2) Andrei a vrut să cumpere două cărți. Prețul unei cărți este cu 25 lei mai puțin iar cealaltă cu 30 lei mai puțin decât banii pe care îi are la el. Dacă cumpără cele două cărți, nu-i ajung 45 lei. Găsiți prețurile pentru fiecare carte.

3) Fie numărul N= 201720182019.
Numim număr *special* un număr format doar din cifre de 0 și 1(exemplu 110; 10001)

a) Să se scrie numărul N ca o sumă de numere *speciale* .
b) Care este cel mai mic număr de numere *speciale* care adunate să dea numărul N.

4) Marian scrie pe tablă numerele 2; 0; 1; 8. La fiecare minut, mărește cu 2 cel mai mic dintre numerele aflate pe tablă – dacă pe tablă sunt mai multe numere la fel de mici, se mărește unul dintre ele cu 2.

După câte minute apare scris, prima dată, pe tablă, numărul 100?

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.

Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a V-a

12 Mai 2018

1) Se dau numerele: 1, 2, 3, ….., 40, 41. După ce se elimină un număr x dintre ele se constată că media aritmetică a numerelor rămase este de forma $\overline{ab},75$.

Aflați numerele naturale x și $\overline{ab}$ care au această proprietate.

2) a) Arătați că pentru orice număr natural nenul n, fracția $\dfrac{4^{n+1}+9^n}{4^n+9^{n+1}}$ este reductibilă.

b) Fracția $\dfrac{4^{n+1}+9^n}{4^n+9^{n+1}}$ se transformă în fracție zecimală . Să se arate că dacă n ≥ 2 atunci cifra zecimilor acestei fracții este 1 .

3) Un număr natural se numește superdivizibil dacă are cel puțin trei divizori proprii și dacă este egal cu suma celor mai mari trei divizori proprii ai săi.

a) Demonstrați că un număr superdivizibil este număr par.

b) Demonstrați că un număr superdivizibil este divizibil cu trei.

c) Aflați câte numere mai mici decât 2018 sunt superdivizibile.

4) Pe o tablă 9×9 sunt colorate 40 din cele 81 de pătrățele. Despre o linie orizontală sau verticală se spune că este *bună* dacă ea conține mai multe pătrățele colorate decât necolorate.
Care este cel mai mare număr de linii *bune* (orizontale și verticale) pe care îl poate avea tabla?

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.

Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

MATE

Concurs

Turneul Olimpicilor

Clasa a V/-a

12 Mai 2018

1) Se consideră mulțimea M={1, 2, 3,......2017, 2018}. Arătați că:

a) orice submulțime cu 1010 elemente a mulțimii M conține 3 numere distincte a, b, c cu $(a, b) \mid c$

b) orice submulțime cu 1010 elemente a mulțimii M conține 3 numere distincte a, b, c cu $(a, b) \nmid c$

Am notat (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

2) Fie triunghiul ABC dreptunghic în A . Pe dreapta BC se consideră punctele D și E astfel încât $B \in (DC)$, $C \in (BE)$, $[AB] \equiv [BD]$ și $[AC] \equiv [CE]$. Se construiesc triunghiurile echilaterale ADM și AEN astfel încât atât M cât și N nu sunt în același semiplan cu A față de dreapta BC.

a) Determinați măsura unghiului MAN.

b) Demonstrați că triunghiul DTE este dreptunghic isoscel, unde $BM \cap CN = \{T\}$.

3) Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle B)=20^0$ și $m(\angle C)=30^0$. Fie D un punct pe latura BC astfel încât $[AD] \equiv [BD]$. Demonstrați că $[AB] \equiv [CD]$.

4) Să se arate că oricare număr natural mai mare decât 10 și ale cărui cifre aparțin mulțimii {1,3,7,9} are un divizor prim mai mare sau egal cu 11.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.

Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a VII-a

12 Mai 2018

1) Aflați numerele prime distincte p, q, r știind că: $7(p+q+r) \geq 2pqr$.

2) Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât a+b+c = 2019.
Demonstrați că: $\sqrt{2a+23}+\sqrt{2b+23}+\sqrt{2c+23} \leq 111$.

3) Fiind date două culori și un dreptunghi $m \times n$ împărțit în pătrate unitate, dorim să colorăm fiecare segment care constituie o latură a unui pătrat unitate cu una din cele două culori astfel încât fiecare pătrat unitate să aibă trei laturi de o culoare și o latură colorată cu cealaltă culoare. Câte astfel de colorări există?

4) Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB \neq AC$. Fie M mijlocul laturii BC și punctele $D \in (AB$, $E \in (AC$ astfel încât $B \in (AD)$, $C \in (AE)$ și $(AM) \equiv (DM) \equiv (EM)$. Perpendicularele în D și E pe MD respectiv ME se intersectează în punctul T. Notăm cu O mijlocul segmentului AT. Demonstrați că triunghiul OBC este isoscel.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.

Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a VIII-a

12 Mai 2018

1)Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația:

$$\sqrt{5y-y^2-x}+\sqrt{5x-x^2-y}=5-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

2) Se consideră 2019 numere naturale nenule cu proprietatea că oricum am alege un număr din cele 2019 pe cele 2018 numere rămase le putem împărți în două grupe de câte 1009 numere având aceeași sumă. Să se demonstreze că toate numerele sunt egale.

3) Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată.

a) Demonstrați că: (ABC') $\perp$ (A'BC) dacă și numai dacă $\frac{AA'}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Știind că măsura unghiului dintre planele (ABC') și (A'BC) este de 60^0 determinați raportul dintre AA' și AB.

4) O piramidă se numește „bună” dacă putem numerota vârfurile și mijloacele muchiilor sale cu numerele consecutive 1, 2, 3, … astfel încât fiecare număr din mijlocul unei muchii să fie media aritmetică a numerelor aflate în capetele respectivei muchii.

a) Să se arate că o piramidă patrulateră este „bună”.

b) Să se arate că nu există piramidă „bună” cu baza un poligon cu număr impar de vârfuri.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.

Soluții clasa a IV-a

1. a) Calculul (12+12:12) :13 =1
Calculul (13+14:14) :14 =1
Calculul 1+1+2018 =2020 (1p)
Suma cifrelor: 2+0+2+0 =4 (1p)
Produsul cifrelor: $2\cdot0\cdot2\cdot0$ =0 (1p)

b) Cate (1p) pentru fiecare variantă gasită:
(4x97)-(96:4) sau
4x(97-96:4) sau 4x(97-96):4 sau (4x97-96):4

2. Notăm x suma totala de bani si a,b prețurile celor două carți
a=x-25 (1p)
b=x-30 (1p)
a+b=x+45 (1p) => 2x-55 = x+45 (1p) => x =100 lei (1p) => a=75 lei (1p)
b=70 lei (1p)

3. a) Orice scriere a numărului N cu numere special se puncteaza (3p)
b) N = 201720182019
101110111011
100110011001
100010001
100010001
100010001
100010001
100010001
10001
1
9 numere (4p).

4. Se observă că **da**că adunăm 2 la un număr, acesta nu-și schimbă paritatea => in orice moment vom avea 3 numere pare și un număr impar (în locul lui 1 va fi număr impar) (1p)
Cum 100=98+2 => 100 s-a format prin adăugarea lui 2 la 98 (1p)
Înainte de a obține prima data 100 vom avea secvența 98, 98, 99, 98 (99 s-a format din 97+2, 97<98) (1p)
Pentru a obține secvența anterioară avem nevoie:
în locul lui 2: (98-2):2 = 48 minute
în locul lui 0: 98:2 + 49 minute
în locul lui 1: (99-1):2 = 49 minute
în locul lui 8: (98-8):2 = 45 minute (3p)
Total 48+49+45+49 = 191 minute => 100 apare după 191+1= 192 minute (1p)

Rezolvari clasa a V-a

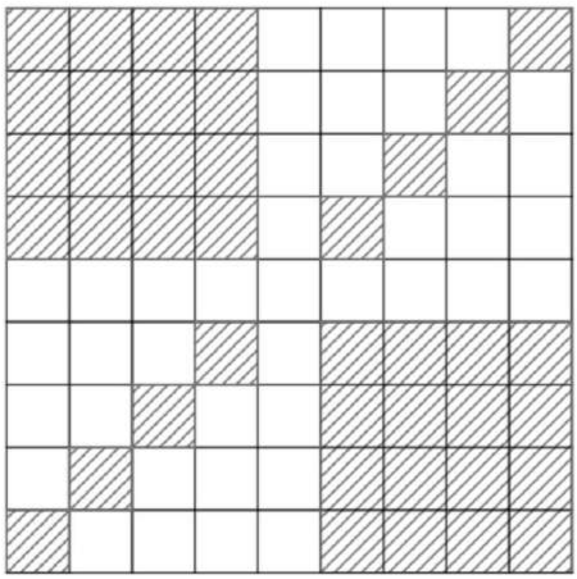
1. 1+2+3+…+40+41=861
$\frac{861-x}{40}=\overline{ab}$,75 =>861-x = 40· $\overline{ab}$+40·0,75 => 861-30-x= 40· $\overline{ab}$ => 831-x = 40·ab => 40|831-x.
Dar 40|800 => 40|31-x => x=31, $\overline{ab}$=20,

2. a) i) n=2k => u($4^{n+1}+9^n$) = u(4+1)=5
u(4^n+9^{n+1}) = u(6+9)=5
fractia se simplifica cu 5.
ii) n=2k+1 => u($4^{n+1}+9^n$)=u(6+9)=5
u(4^n+9^{n+1})=u(4+1)=5
fractia se simplifica cu 5.

b) Vom arata ca $0,1<\frac{4^{n+1}+9^n}{4^n+9^{n+1}}<0,2$ ⇔ $4^n+9^{n+1}<10(4^{n+1}+9^n)$ si $5(4^{n+1}+9^n)<4^n+9^{n+1}$ ⇔ $0<39\cdot 4^n+9^n$ (A)
si $20\cdot 4^n+5\cdot 9^n<4^n+9\cdot 9^n$ ⇔ $19\cdot 4^n<4\cdot 9^n$ |:4 ⇔ $19\cdot 4^{n-1}<9^n$ ⇔ $76\cdot 4^{n-2}<81\cdot 9^{n-2}$ (∀) n≥2.

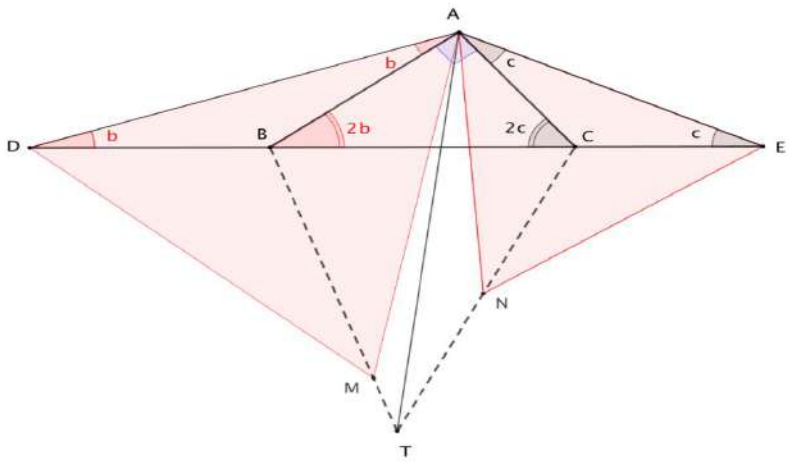
3. Notam $d_1>d_2<d_3$ cei mai mari 3 divizori proprii ai lui n.
a) Presupunem prin absurd ca n este impar => $d_1\leq\frac{n}{3}$, $d_2\leq\frac{n}{5}$, $d_3\leq\frac{n}{7}$ => $n=d_1+d_2+d_3\leq\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\frac{n}{7}$ => $1\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+$=> $1\leq\frac{71}{105}$ (contradictie) => n=par => $d_1=\frac{n}{2}$
b) Presupunem prin absurd ca 3∤n => $d_2\leq\frac{n}{4}$, $d_3\leq\frac{n}{5}$ => $n=d_1+d_2+d_3\leq\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}$ => $1\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ =>$1\leq\frac{19}{20}$ (contradictie) => n⋮3 => $d_2=\frac{n}{3}$
c) => $d_3=n-\frac{n}{2}-\frac{n}{3}-\frac{n}{3}=\frac{n}{6}$ =>4∤n si 5∤n => n=6k, k=2p+1=> n=12p+6, p≠M_5+2 n=6 nu are 3 divizori proprii => p ∈{1,2,3,…,167} si p ∉{5·0+2,5·1+2,…,5·33+2} => 167-34=133 nr.superlativ.

4. Pentru ca o linie sa fie bună ea trebuie să aibă cel puțin 5 pătrățele colorate. Dacă am avea 9 linii orizontale sau verticale bune => minim 9x5=45 pătrățele colorate >40 contradicție => maxim 8 linii bune pe orizontală si maxim 8 linii bune pe verticală. Un exemplu de colorare bună este in figura alăturată.



1. a) Formăm cutiile {1,2}, {3,4},…{2017, 2018} => din principiul cutiei 2 nr. consecutive => (n, n+1) = 1| c.
   b) Orice submulțime cu 1010 elemente conține cel puțin un nr. par și cel puțin un nr. impar c
      i) dacă are 2 nr. pare a,b => (a,b) = par ∤ c = impar.
      ii) dacă toate sunt impare si unul par, de exemplu 3= (3,9) ∤ 2017.

2.

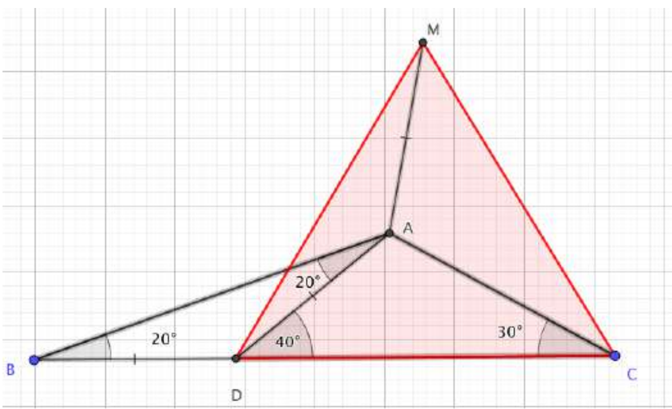


a) Notăm m($\widehat{BAD}$)=b, m($\widehat{CAE}$)=c => m($\widehat{ABC}$)=2b, m($\widehat{ACB}$)=2c => b+c = 45^0 => m($\widehat{BAM}$)= 60^0-b, m($\widehat{CAN}$)=60^0-c => m($\widehat{MAN}$)= 90^0- [120^0-(b+c)]= 90^0- (120^0-45^0) = 90^0 -75^0=$15^{0.}$

b) AB≡BD | AM≡MD | ➡ BM mediatoarea lui AD; Analog CN mediatoarea lui AE } ➡ DT≡AT și AT≡TE => DT≡TE => ΔDTE isoscel =>

$\widehat{BAT} \equiv \widehat{BDT}$, $\widehat{CAT} \equiv \widehat{CET}$ => $\widehat{TDE} + \widehat{DET}$= 90^0 => $\widehat{DTE}$= 90^0 => ΔDTE dreptunghic isoscel.

3.



Construim ca in figură
ΔMDC echilateral => ΔMAC≡ΔDAC (L.U.L.) => MA≡AD≡BD
m($\widehat{ADC}$)=40^0 => m($\widehat{ADM}$)=20^0 => ΔMAD≡ΔADB (L.U.U.) => MD≡DC => DC ≡AB.

4. Evident 2,5 ∤ n Presupunem prin absurd că nu are factori primi ≥ 11 => el are doar factori primi 3 sau 7 => n=$3^x \cdot 7^y$. Vom arăta că un astfel de nr. are penultima cifră pară.
$u_2(7^y)$ ∈ {07, 49, 43, 01}
$u_2(3^x)$ ∈ {03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01} => penultima cifra a lui 7^y și a lui 3^x este pară.
Avem $\overline{p_1 i_1} \cdot \overline{p_2 i_2} = \overline{ai}$ i_1, i_2 ∈ {1, 3, 7, 9}
p_1, p_2 = cifre pare
a pară deoarece $p_1 i_2 + p_2 i_1$ pară și $u_2(i_1 \cdot i_2)$= pară
=> presupunerea făcută este falsă => are un factor prim ≥ 11.

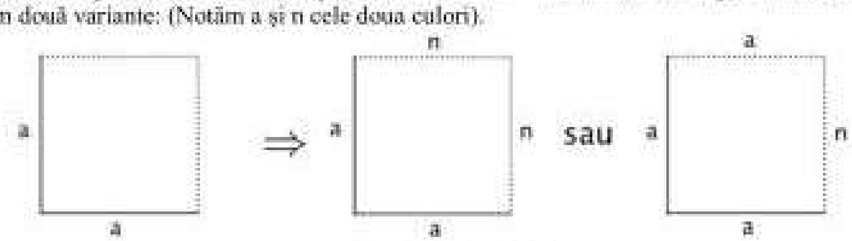
Rezolvări clasa a VII-a

1. Putem presupune p<q<r. Vom demonstra că p=2. Presupunem prin absurd că p≠2 => p≥3, q≥5, r≥7 => ipoteza $\Leftrightarrow \frac{2}{7} \le \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \le \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7} \Rightarrow \frac{2}{7} \le \frac{15}{3\cdot 5\cdot 7} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \le \frac{1}{7}$ (contradicție) => p=2.
   Vom demonstra că q=3. Altfel q≥5, r≥7 => $\frac{2}{7} \le \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \le \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7} \Rightarrow \frac{2}{7} \le \frac{14}{2\cdot 5\cdot 7} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \le \frac{1}{5} \Leftrightarrow 10 \le 7$ (contradicție) => q=3 => $7(2+3+r) \ge 2\cdot 2\cdot 3\cdot r \Rightarrow 35 + 7r \ge 12r \Rightarrow 35 \ge 5r \Rightarrow r \le 7 \Rightarrow r \in \{5,7\}$ => Soluțiile (2, 3, 5), (2, 3, 7) și toate combinațiile lor.

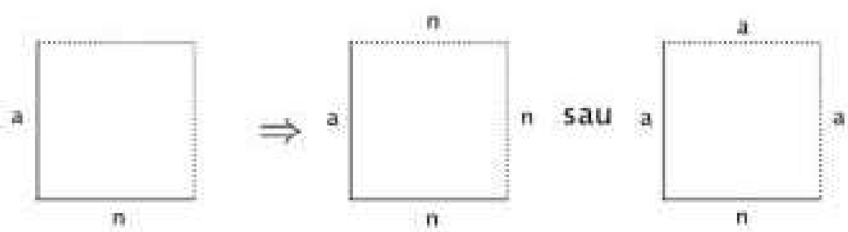
2. a+b+c=2019
   $\sqrt{2a+23} + \sqrt{2b+23} + \sqrt{2c+23} \le 111 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2a+23)}{111^2}} + \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2b+23)}{111^2}} + \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2c+23)}{111^2}} \le 1$
   Din inegalitatea mediilor => $A \le \frac{3\cdot\frac{1}{3} + \frac{6(a+b+c)+9\cdot 23}{111^2}}{2} = \frac{1+\frac{6\cdot 2019+9\cdot 23}{111^2}}{2} = 1$.

3.

Colorăm marginea A-B-C. Aceasta poate fi făcută în 2^{n+m} moduri. Dacă un pătrat unitate are două laturi colorate avem două variante: (Notăm a și n cele doua culori).



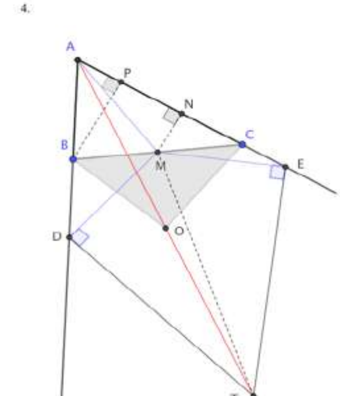
⇒ 2 posibilități



⇒ 2 posibilități

=> indiferent cum sunt colorate două laturi ale unui pătrat unitate avem 2 variante de colorare. Cum pătratul are $n\times m$ pătrățele unitate => $2^{n\times m}$ posibilitați => total $2^{n\times m}\cdot 2^{n+m} = 2^{n\times m+n+m}$ moduri.

4.



Deducem BP⊥ AC și MN⊥ AC => PN ≡ NC (MN l.m.)
AN ≡ NE (Δ AME is.)
=> AP ≡ CE, Δ MDT ≡ Δ MET (I.C.) => $\widehat{DMT} \equiv \widehat{TME} \equiv \widehat{A}$ (M centrul cercului circumscris Δ ADE)
=> Δ APB~Δ MET (U.U) => $\frac{AP}{ME} = \frac{BP}{TE}$ ON l.m. in Δ ATE => ON∥TE => ON⊥ME => $\widehat{MNO} \equiv \widehat{MEC}$
=> Δ MNO~Δ CEM => $\widehat{NMO} \equiv \widehat{ECM} \Rightarrow \widehat{NMC} + \widehat{OMC} = \widehat{CNM} + \widehat{NMC} \Rightarrow \widehat{OMC} \equiv \widehat{CNM} = 90^0$
=> OM⊥BC. Dar BM ≡ MC => Δ OBC isoscel.
$MN = \frac{BP}{2}$, ON = $\frac{TE}{2} \Rightarrow \frac{AP}{ME} = \frac{\frac{BP}{2}}{\frac{TE}{2}} = \frac{MN}{ON}$. Dar AP ≡ CE => $\frac{CE}{ME} = \frac{MN}{ON}$

Rezolvari clasa a VIII-a

1. $5-2\sqrt{5y-y^2-x}-\frac{x}{y}+5-2\sqrt{5x-x^2-y}-\frac{y}{x}=0$

=> $\frac{5y-x}{y}-2\sqrt{5y-y^2-x}+\frac{5x-y}{x}-2\sqrt{5x-x^2-y}=0$

=> $\left(\frac{5y-x-y^2}{y}-2\sqrt{5y-y^2-x}+y\right)+\left(\frac{5x-y-x^2}{x}-2\sqrt{5x-x^2-y}+x\right)=0$

=> $\left(\sqrt{\frac{5y-x-y^2}{y}}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5x-y-x^2}{x}}-\sqrt{x}\right)^2=0$ =>

$5y-x=2y^2$
$5x-y=2x^2$ ➡ $2(y-x)(y+x)=6(y-x)$ =>

i) $y=x$ => $4x=2x^2$, $x\neq 0$

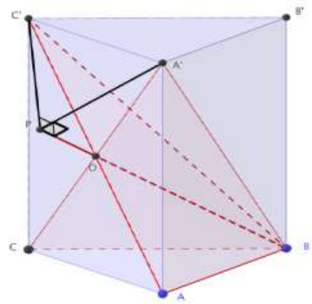
ii) $y+x=3$ => $y=3-x$ => $5x-3+x=2x^2$ => $2x^2-6x+3=0$, $\Delta=36-24=12$ => $x_1=\frac{6+\sqrt{12}}{4}=\frac{3+\sqrt3}{2}$,
$x_2=\frac{6-\sqrt{12}}{4}=\frac{3-\sqrt3}{2}$, $y_1=\frac{3+\sqrt3}{2}$, $y_2=\frac{3-\sqrt3}{2}$ => $S=\{(2,2);\ (\frac{3+\sqrt3}{2},\frac{3-\sqrt3}{2}),\ (\frac{3-\sqrt3}{2},\frac{3+\sqrt3}{2})\}$

2. Presupunem că exista $a_1, a_2,...,a_{2019}$ numere nu toate egale si care au suma minimă S. $S-a_i=2\cdot s$
=> $S\equiv a_i \pmod 2$ $(\forall)i$ => toate sunt nr. pare sau toate sunt nr. impare =>

i) Dacă toate sunt pare => $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ îndeplinește cerința și au suma $\frac{S}{2}<S$ in contradicție cu minimalitatea lui S.

ii) toate impare => $\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, ..., \frac{a_{2019}+1}{2}$ verifică cerința și contrazice minimalitatea.

3.



Notăm AB=a, BB'=B

$(A'BC)\cap(ABC')$ = BO

Deducem $A'P\perp BO$ => $C'P\perp BO$ => $\sphericalangle((ABC'),(A'BC))=\sphericalangle\widehat{A'PC'}$ sau suplementul acestuia.

Dar $\sphericalangle A'PC=90^0 \Leftrightarrow M'P=\frac{A'C'}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt3}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}} \Leftrightarrow b\sqrt3=\sqrt{3a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2=2b^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

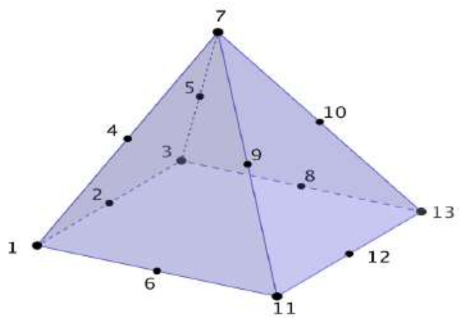
$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt6}{2}$

$\Delta OPM'\sim\Delta OMB$ (U.U.) => $\frac{M'P}{MB}=\frac{OM'}{OB}$, $MB=\frac{a\sqrt3}{2}$, $OB=\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{2}}$

b) i) $\widehat{A'PC'}=60^0 \Leftrightarrow PM'=\frac{a\sqrt3}{2}$ => $PM'\equiv MB$ => $M'O\equiv OB$ => $MO\equiv OB$ (contradicție).

ii) $\widehat{A'PC'}=120^0 \Leftrightarrow PM'=\frac{a\sqrt3}{6}$ => $\frac{\frac{a\sqrt3}{6}}{\frac{a\sqrt3}{2}}=\frac{b}{\sqrt{3a^2+b^2}}$ => $3b=\sqrt{3a^2+b^2}$ => $8b^2=3a^2$ => $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6}{4}$.

4. a) Un exemplu de piramidă patrulateră bună.



b) Daca baza are 2k+1 vârfuri => 4k+2 numere sunt la bază și 2k+2 numere ce nu sunt la bază => 6k+4 numere în total.

Extremele 1 și 6k+4 nu pot fi în mijloc deoarece nu pot fi medii aritmetice => ele sunt in vârfuri => 1 în vârf => în toate vârfurile sunt numere impare => Dar 6k+4 trebuie să fie în vârf => contradicție => nu se poate.