Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătați că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ și $C(0,8)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\ (a+1)x-y+z=0\\ x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\dfrac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\dfrac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2-2z+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=$	**2p**
	$=1-4i+4i^2-2+4i+5=1-4-2+5=0$	**3p**
2.	$M(2,8)\in G_f \Rightarrow f(2)=8\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4$	**3p**
	$M(2,8)\in G_g \Rightarrow g(2)=8\Rightarrow 2b+2=8\Rightarrow b=3$	**2p**
3.	$\log_3(4x+5)=\log_3 3(x+3)\Rightarrow 4x+5=3x+9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$	**2p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM, deci $M(6,0)$	**3p**
	$CM=10$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle BAC)=6\cdot 10\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=6\cdot 10\cdot\frac{1}{2}=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=-2$ sau $a=-1$	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2a}{(a+1)(a+2)},\frac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\frac{1}{a+1}\right)$	**2p**
	$\frac{4a}{(a+1)(a+2)}+\frac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\frac{2}{3}$ sau $a=-\frac{1}{2}$, care convin	**3p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{10}xy-x-y+10+10=$ $=\frac{1}{10}x(y-10)-(y-10)+10=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2+10\le\frac{101}{10}\Leftrightarrow(x-10)^2\le 1$ $x\in[9,11]$	**3p** **2p**
c)	$x*10=10$ și $10*x=10$, pentru orice număr real x $\log_2 1*\log_2 2*\ldots*\log_2 2018=\left((\log_2 1*\ldots*\log_2 1023)*10\right)*\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018=$ $=10*(\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018)=10$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6x+6-\frac{6}{x+1}=$ $=\frac{6x^3+6x^2-6x^2-6x+6x+6-6}{x+1}=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$ $f(x)\ge f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, valoarea minimă a funcției f este 0	**1p** **2p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x+1}=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{\lvert x\rvert}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=\int_0^1(x^2+x+1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right\vert_0^1=$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0=\frac{11}{6}$	**3p** **2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=(x^2+3x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ $F''(-2)=0$, $F''(-1)=0$, $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)$, $F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-2,-1)$ și $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F'(t)}{1}=$ $=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1$	**3p** **2p**